Math. Fr.

624 f

Ibmpfenbach

<36632873160012

<36632873160012

Bayer. Staatsbibliothek

Lehrbuch

der

Differential=

und

Integral=Rechnung.

Von

Dr. H. Umpfenbach,

ordentlichem Professor der Philosophie an der Universität zu Giessen.

Berlin, bei August Rücker.

1828.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Gedruckt bei Fr. Brockhaus in Leipzig.

Vorrede.

Obschon wir in unserer Sprache mehre schätzbare Werke über die höhere Analysis besitzen, so schien es mir doch an einem solchen zu fehlen, in welchem die in der Anwendung am wichtigsten Theile derselben in einer solchen Ausführlichkeit und mit so viel Klarheit vorgetragen sind, daß es sich auch zum Selbststudium eigene.

Dieses veranlaßte mich, das gegenwärtige Werk auszuarbeiten, und so meinen Beitrag zur Erreichung dieses Zweckes zu geben; welchem ich am besten nachzukommen glaubte, indem ich mich besonders bei den schwierigsten Stellen verweilte, und es nirgends an Beispielen fehlen ließ, nach des unsterblichen Newton Regel: **In addiscendis scientiis exempla plus prosunt quam praecepta.**

Wenn sich das gegenwärtige Werk einer nicht ungünstigen Aufnahme zu erfreuen hat, so gedenke ich ein eigenes Werk über die höhere analytische Geometrie nachfolgen zu lassen.

Gieſſen, den 16. Jenner 1828.

Dr. H. Umpfenbach.

Differentialrechnung.

Einleitung.

§. 1.

Eine Größe, deren Werth immer derselbe bleibend angenommen wird, nennt man eine beständige Größe. Dieser Werth kann entweder direkt, oder durch eine bestimmte Abhängigkeit von andern direkt gegebenen Größen gegeben seyn.

Wenn dagegen der Werth einer Größe vermöge der Art des Zusammenhangs, in welchem sie zu andern Größen steht, beliebig geändert werden kann, so nennt man sie eine veränderliche Größe.

In der Folge werden wir beständige Größen durch die ersten, und veränderliche Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets vorstellen.

§. 2.

Wenn der Werth einer veränderlichen Größe u von dem Werthe anderer veränderlichen Größen x, y, z .... abhängig ist, so nennt man u eine Funktion von x, y, z .... In der Regel kann diese Abhängigkeit durch Gleichungen zwischen beständigen und diesen veränderlichen Größen ausgedrückt werden.

Zur Bezeichnung einer Funktion bedient man sich der Buchstaben f, F, φ, ψ ...; so z. B. bedeutet $u = fx$, daß

daß der Werth von u abhängig ist von dem Werthe von x, $u = \varphi(x, y, z)$ bedeutet, daß der Werth von u abhängig ist von dem Werthe von x, y und z, u. s. w.

Wenn in einer Rechnung einer dieser Bezeichnungsbuchstaben zur Andeutung einer gegebnen Art von Abhängigkeit angenommen worden ist, so wird im Laufe dieser Rechnung derselbe Bezeichnungsbuchstabe auch dieselbe Art von Abhängigkeit andeuten. Wenn also $u = fx$ und sodann in derselben Rechnung $v = fy$ vorkömmt, so bedeutet dieses, daß v auf dieselbe Weise von y, als u von x abhängig ist; wenn z. B. $u = ax + b$, so wird $v = ay + b$ seyn.

Wenn eine veränderliche Größe durch einen kleinen Buchstaben vorgestellt ist, so bedient man sich öfters des entsprechenden großen Buchstabens desselben Alphabets, um eine Funktion dieser veränderlichen Größe vorzustellen; so z. B. stellen wir öfters durch X eine Funktion von x, und durch Y eine Funktion von y vor.

§. 3.

Wenn die Abhängigkeit einer Funktion von veränderlichen Größen durch Gleichungen ausgedrückt ist, so ist diese Funktion entweder eine algebraische oder eine transszendente.

Wenn nämlich in diesen Gleichungen die veränderlichen Größen nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division unter einander und mit beständigen Größen verbunden sind, und wenn außerdem die veränderlichen Größen nur zu beständigen rationalen Exponenten erhoben oder unter Wurzelzeichen vorkommen, so nennt man die Funktion eine algebraische. So z. B., wenn $u = ax^2 + bx + c$, so ist u eine algebraische Funktion von x; wenn $z = \frac{\sqrt[3]{ax^2 + by^2}}{x + y}$, so ist z eine algebraische Funktion von x und y; wenn $v = ax^{\frac{3}{2}} - by^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{5}}$, so ist v eine algebraische Funktion von x, y und z.

Wenn dagegen die veränderlichen Größen noch auf andere Weisen, z. B., wenn der Logarithmus oder eine trigonometrische Linie einer veränderlichen Größe, oder eine veränderliche Größe als Exponent, oder eine veränderliche Größe zu einem irrationalen Exponenten erhoben, u. s. w., vorkommen, so nennt man die Funktion eine transzendente. So, wenn $u = \log. (a + bx)$, so ist u eine transzendente Funktion von x; wenn $u = a^x + b^y$, so ist u eine transzendente Funktion von x und y; wenn $u = \sin. \frac{x}{y} + \cos. \frac{x}{z}$, so ist u eine transzendente Funktion von x, y und z.

§. 4.

Eine algebraische Funktion ist entweder eine gesonderte oder eine ungesonderte.

Eine gesonderte algebraische Funktion ist eine solche, deren Werth sogleich, ohne daß es nöthig sey, eine Gleichung aufzulösen, berechnet werden kann, wenn für die veränderlichen Größen, von welchen sie abhängt, bestimmte Werthe angenommen werden; so z. B., wenn $u = \frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, so können wir sogleich den entsprechenden Werth von u berechnen, wenn für x und y bestimmte Werthe angenommen werden; u ist also eine gesonderte algebraische Funktion von x und y.

Eine ungesonderte algebraische Funktion ist dagegen eine solche, deren Werth nur nach erfolgter Auflösung einer Gleichung berechnet werden kann, wenn man für die veränderlichen Größen bestimmte Werthe annimmt. Diese Funktion sey u; es wird dann u eben so viele Werthe haben, als Einheiten in dem Grade dieser Gleichung enthalten sind; man nennt deßwegen auch eine ungesonderte algebraische Funktion eine vielförmige, weil ein jeder dieser Werthe eine verschiedne gesonderte Funktion vorstellt.

Wenn u in der Gleichung nur in dem ersten Grade vorkömmt, so hat dasselbe nur einen Werth, und die Funktion

ist eine einförmige; so z. B., wenn $u\,(x^2+y^2) = axy$, so ist u eine einförmige ungesonderte Funktion von x und y; aus dieser Gleichung folgt der gesonderte Ausdruck der Funktion: $u = \frac{axy}{x^2+y^2}$.

Wenn u in der Gleichung in dem zweiten Grade vorkömmt, so hat dasselbe zwei Werthe, die Funktion ist also eine zweiförmige; so, z. B., folgt aus der Gleichung $u^2 - 2\,(a+x)\,u = a^2 + x^2$ ein Werth $u = a+x+\sqrt{(a+x)^2+a^2+x^2}$, und ein zweiter Werth $u = a+x-\sqrt{(a+x)^2+a^2+x^2}$, wovon ein jeder eine verschiedne gesonderte Funktion von x vorstellt.

Eben so führt die Bestimmung der drei gesonderten Funktionen aus einer dreiförmigen ungesonderten Funktion zu der Auflösung einer Gleichung von dem dritten Grade; die Bestimmung der vier gesonderten Funktionen aus einer vierförmigen ungesonderten Funktion zu der Auflösung einer Gleichung von dem vierten Grade, u. s. w. Aus der Algebra setze ich als bekannt voraus, daß die Formeln, welche die Wurzeln einer Gleichung von dem dritten oder vierten Grade ausdrücken, wegen ihrer Zusammengesetztheit nicht sehr brauchbar sind, und daß bis jetzt die allgemeine Auflösung der Gleichungen von höhern Graden noch nicht gefunden wurde. Es kann also nur bei ein- und zweiförmigen ungesonderten Funktionen von Vortheil seyn, daraus die gleichbedeutenden gesonderten Funktionen abzuleiten.

§. 5.

Eine gesonderte algebraische Funktion ist entweder eine ganze, oder eine gebrochne.

Eine ganze Funktion ist eine solche, in deren Ausdrucke die veränderlichen Größen nirgends in einem Nenner vorkommen. So, z. B., wenn $u = \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{e}y^2$, so ist u eine ganze Funktion von x und y.

Wenn dagegen in dem Ausdrucke der Funktion die veränderlichen Größen auch in einem Nenner vorkommen, so ist die Funktion eine gebrochne. So, z. B., wenn

$u = \frac{x^4 + a^2 x^2 + a^4}{x^3 + a^3}$; so ist u eine gebrochne Funktion von x.

Die gesonderten algebraischen Funktionen zerfallen ferner noch in rationale und irrationale.

Eine rationale Funktion ist eine solche, in deren Ausdrucke die veränderlichen Größen nirgends unter einem Wurzelzeichen vorkommen; von dieser Art sind die Funktionen

$u = \frac{ax + by}{x + y}$; $u = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Eine irrationale Funktion dagegen ist eine solche, in deren Ausdrucke die veränderlichen Größen unterhalb eines Wurzelzeichens vorkommen, wie, z. B., die Funktionen

$u = \sqrt[3]{a^3 + x^3}$; $z = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + y^2}}$.

§. 6.

Wenn eine algebraische Funktion zweier oder mehrerer veränderlichen Größen so beschaffen ist, daß in einem jeden Theilsatze ihres Ausdruckes die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen dieselbe ist, so nennt man die Funktion eine homogene; diese Summe der Exponenten nennt man die Dimension der homogenen Funktion. Wenn

also im allgemeinen $u = Ax^{\alpha}y^{\beta} + Bx^{\gamma}y^{\delta} + Cx^{\eta}y^{\varepsilon} + \text{etc.}$, und wenn $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \eta + \varepsilon = \ldots$; so ist u eine homogene Funktion von x und y, deren Dimension $\alpha + \beta$ ist. Wenn, z. B., $u = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$, so ist u eine homogene Funktion von x und y, deren Dimension 3 ist.

Die Dimension einer homogenen Funktion kann auch $= 0$ seyn; wenn wir die vorhin angeführte allgemeine Gleichung zu Grunde legen, so wird dieses statt finden,

wenn $\alpha = -\beta$, $\gamma = -\delta$, $\eta = -\varepsilon \ldots$; es ist dann $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \eta + \varepsilon = \ldots = 0$.

Die Dimension einer homogenen Funktion kann auch negativ seyn; so, z. B., wenn

$$u = \frac{A}{y^2} + \frac{By}{x^3} + \frac{Cy^2}{x^4} + \frac{Dy^3}{x^5} =$$

$Ay^{-2} + Bx^{-3}y + Cx^{-4}y^2 + Dx^{-5}y^3$, so ist u eine homogene Funktion von x und y, deren Dimension $= -2$.

§. 7.

Es sey y die Funktion einer einzigen veränderlichen Größe x, und die gegebne Gleichung zwischen y und x im allgemeinen durch $y = fx$ ausgedrückt; wenn die gegebne Funktion eine gesonderte ist, so erscheint sie geradezu unter dieser Gestalt; wenn diese Funktion aber eine ungesonderte ist, so nehmen wir an, daß die aus dieser ungesonderten abgeleiteten gesonderten Funktionen im allgemeinen durch die Gleichung $y = fx$ dargestellt sind.

Wenn wir x einen beliebigen bestimmten Werth geben, so bestimmen wir durch diese Gleichung den entsprechenden bestimmten Werth (oder die entsprechenden bestimmten Werthe, wenn die Funktion eine vielförmige ist) von y.

Angenommen, daß x einen Zuwachs c erhalte, so wird überall, wo früher x stand, zu stehen kommen $x + c$; stellen wir den Werth, welchen dadurch y erhält, durch y' vor, so ist also $y' = f(x + c)$. Wenn die Funktion eine vielförmige ist, so ist klar, daß y' eben so viele Formenwerthe haben muß, als y; denn die Gleichung, durch welche wir y' bestimmen, erhalten wir aus der ursprünglich gegebnen zwischen x und y, indem wir in dieser zugleich y' statt y und $x + c$ statt x hinschreiben.

Sehen wir nun, unter welcher Gestalt die Entwickelung von $y' = f(x + c)$ erscheint, wenn wir diese Entwickelung nach einer Reihe von Theilsätzen vornehmen, in welchen die verschiednen Potenzen von c Faktoren sind, deren Coeffi-

zienten von der Art der gegebnen ursprünglichen Funktion abhängige Funktionen von x sind.

Vorerst ist klar, daß, wenn wir $c = o$ setzen, wir wieder $y = fx$ erhalten müssen; denn wenn der Zuwachs, welchen x erhält, $= o$ ist, so ändert auch y seinen Werth $= fx$ nicht; es muß also fx ein Theilsatz der Entwickelung von $f(x+c)$ seyn; diese Entwickelung muß also unter der Gestalt erscheinen:

$$f(x+c) = fx + Pc^{\alpha} + Qc^{\beta} + Rc^{\gamma} + \text{etc.}$$

Es kann ferner in dieser Entwickelung kein Exponent einer Potenz von c negativ seyn; denn wenn, z. B., γ negativ und $= -m$ wäre, so wäre $Rc^{\gamma} = Rc^{-m} = \frac{R}{c^m}$; für $c = o$ würde dieser Theilsatz $= \frac{R}{o^m} = \frac{R}{o}$, also unendlich groß, werden; für $c = o$ würde also auch $f(x+c)$ unendlich groß, welches nicht statt findet, indem im Gegentheile der Werth von $f(x+c)$ für $c = o$ sich in fx verwandelt.

Ich behaupte nun ferner, daß keiner der Exponenten einen gebrochnen Werth haben kann; denn wenn z. B. γ den gebrochnen Werth $\frac{m}{n}$ hätte, so wäre der Theilsatz der Entwickelung $Rc^{\gamma} = Rc^{\frac{m}{n}} = R\sqrt[n]{c^m}$. Es hat aber $\sqrt[n]{e^m}$ n verschiedne Werthe (s. meine Algebra, Seite 265); da wir nun nach und nach einen jeden dieser Werthe in die Entwickelung von $f(x+c)$ setzen können, so finden wir für einen Werth von fx, n Werthe von $f(x+c)$; dieses kann aber nicht seyn, weil, wie wir vorhin gesehen haben, einem Werthe von fx nur ein Werth von $f(x+c)$ entspricht; unsre Annahme, daß ein Exponent von c in der Entwickelung ein gebrochner seyn könne, war also unrichtig.

Die in der Entwickelung von $f(x+c)$ vorkommenden Exponenten von c können also nur ganze, positive Zahlen

seyn; diese Entwickelung muß also im allgemeinen unter der Gestalt erscheinen:

$$f(x+c) = fx + Pc + Qc^2 + Rc^3 + Sc^4 + \ldots.$$

Wir werden noch in der Folge sehen, auf welche Weise wir die Werthe der Funktionen P, Q, R, S ..., aus der gegebnen fx herzuleiten im Stande sind.

§. 8.

Wenn also $y = fx$, und wenn $y' = f(x+c)$ der Werth ist, welchen y erhält, indem x den Zuwachs c erhält, d. h., indem man statt x hinschreibt $x+c$, so ist $y' = y + Pc + Qc^2 + Rc^3 + Sc^4 + \ldots.$, daher $y' - y = Pc + Qc^2 + Rc^3 + Sc^4 + \ldots.$, folglich

$$\frac{y'-y}{c} = P + Qc + Rc^2 + Sc^3 \ldots.$$

$$= P + c(Q + Rc + Sc^2 + \ldots.).$$

Es ist $y' - y$ der Zuwachs, welchen die Funktion y erhalten hat, indem x den Zuwachs c erhielt; es ist also $\frac{y'-y}{c}$ das Verhältniß des Zuwachses der Funktion zu dem Zuwachse der veränderlichen Größe. In dem Werthe dieses Verhältnisses ist P der einzige von c unabhängige Theilsatz; alle übrige Theilsätze sind durch c und ganze positive Potenzen von c multiplizirt.

Diese Entwickelung ist richtig, welches auch der Werth von c sey, sie bleibt also immer noch richtig, wenn der Zuwachs c, welchen x erhält, kleiner ist, als eine jede gegebne Größe, d. h., verschwindend klein ist. Einen solchen verschwindend kleinen Zuwachs, welchen x erhält, nennt man das Differential von x; wir bezeichnen denselben durch dx, indem wir der veränderlichen Größe x den Buchstaben d vorsetzen. Den Zuwachs $y' - y$, welchen dadurch die Funktion y erhält, nennen wir das Differential von y und bezeichnen denselben eben so durch dy; es ist also $\frac{dy}{dx} = P + dx\ (Q + R\,dx + \ldots.)$.

Der zweite Theil des zweiten Gliedes dieser Gleichung enthält den Faktor dx, welcher nach Annahme verschwindend klein, d. h., kleiner als eine jede gegebene Größe ist; dieser zweite Theil ist also auch kleiner als eine jede gegebne Größe; $\frac{dy}{dx}$ ist also von P weniger als um eine jede noch so kleine anweisbare Größe verschieden; wir begehen also keinen Irrthum, indem wir $\frac{dy}{dx} = P$ setzen.

Wenn also y eine Funktion von x ist, so ist das Verhältniß des Differentials der Funktion zu dem Differentialen der veränderlichen Größe immer ein endliches. Dieses Verhältniß nennt man den Differentialquotienten der Funktion. Wir werden uns in der Differentialrechnung vorerst damit beschäftigen, denselben bei den verschiednen Arten von Funktionen zu bestimmen. Wenn der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = P$ einer Funktion gefunden ist, so folgt daraus das Differential der Funktion $dy = P\,dx$.

§. 9.

Zur Erläuterung der Betrachtungen des vorigen §. wollen wir dieselben auf die folgenden einfacheren Beispiele anwenden.

Es sey $y = Ax + B$; stellen wir durch y' den Werth vor, welchen y erhält, indem sich x in $x + c$ verwandelt, so ist $y' = A(x + c) + B = Ax + B + Ac = y + Ac$, indem wir statt $Ax + B$ seinen Werth y setzen; es ist also $\frac{y' - y}{c} = A$. Wenn wir nun $c =$ dem Differentialen der veränderlichen Größe $= dx$ setzen, so ist $y' - y =$ dem Differentialen der Funktion $= dy$, folglich der Differentialquotient der Funktion $\frac{dy}{dx} = A$, daher das Differential derselben $dy = A\,dx$.

Es sey $y = Ax^2 + Bx + C$; stellen wir wieder durch y' den Werth vor, welchen y erhält, indem x sich in $x + c$ verwandelt, so ist $y' = A(x + c)^2 + B(x + c) + C = Ax^2 + Bx + C + c(2Ax + B) + Ac^2 = y + c(2Ax + B) + Ac^2$, indem wir statt $Ax^2 + Bx + C$ seinen Werth y setzen; es ist also $y' - y = c(2Ax + B) + Ac^2$, daher $\frac{y' - y}{c} = 2Ax + B + Ac$.

Wenn wir nun $c = dx$ setzen, so ist $y' - y = dy$, folglich $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B + Adx$. Da nun dx kleiner ist, als eine jede anweisbare Größe, so ist auch Adx kleiner als eine jede anweisbare Größe, kann also neben der endlichen Größe $2Ax + B$ ohne Irrthum vernachlässigt werden; es ist also der Differentialquotient der Funktion $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$, und das Differential derselben $dy = (2Ax + B)\,dx$.

Es sey nun $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; stellen wir wieder durch y' den Werth vor, welchen y erhält, indem sich x in $x + c$ verwandelt, so ist $y' = A(x + c)^3 - B(x + c)^2 + C(x + c) + D =$ (indem wir die Entwickelung nach den Potenzen von c ordnen) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + c(3Ax^2 + 2Bx + C) + c^2(3Ax + B) + Ac^3 = y + c(3Ax^2 + 2Bx + C) + c^2(3Ax + B) + Ac^3$, indem wir statt $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ seinen Werth y setzen; es ist also $y' - y = c(3Ax^2 + 2Bx + C) + c^2(3Ax + B) + Ac^3$, daher $\frac{y' - y}{c} = 3Ax^2 + 2Bx + C + c(3Ax + B) + Ac^2$.

Setzen wir nun $c = dx$, so ist $y' - y = dy$, daher $\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C + dx(3Ax + B) + Adx^2$.

Da nun die Theilsätze, welche dx und dx^2 als Faktoren

enthalten, kleiner sind, als eine jede anweisbare Größe, so erhalten wir, indem wir dieselben weglassen, den Differentialquotienten der Funktion $\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C$, daher das Differential der Funktion

$$dy = (3Ax^2 + 2Bx + C)\,dx.$$

§. 10.

Die Differentialrechnung beruht also demnach auf der Grundlage, daß, wenn wir den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = P + Q\,dx + R\,dx^2 + \ldots$$

$= P + dx\,(Q + R\,dx + \ldots)$ entwickelt haben, wir die auf P folgenden Theilsätze des zweiten Gliedes der Gleichung weglassen und also $\frac{dy}{dx} = P$ setzen können.

Die Richtigkeit dieser Annahme ist einleuchtend; denn wenn $\frac{dy}{dx}$ gleich seyn könnte P, vermehrt um eine noch so kleine aber endliche Größe p, so würde $P + p$ gleich seyn $P + dx\,(Q + R\,dx + \ldots)$, also die endliche Größe p gleich seyn der unendlich kleinen $dx\,(Q + R\,dx + \ldots)$, welches unmöglich ist.

Verschiedne Mathematiker bemühten sich, die Differentialrechnung nach andern Grundlagen vorzutragen und den Begriff des unendlich Kleinen zu verbannen; dahin gehören die Funktionenrechnung von Lagrange, die Derivationenrechnung von Arbogast, u. a. z. m. Allein alle diese Methoden bieten so große Schwierigkeiten in ihrer Anwendung dar, daß selbst Lagrange, der scharfsinnigste Mathematiker der neuern Zeit, nicht im Stande war, in der neuern Auflage seiner **Mécanique analytique** den Begriff des unendlich Kleinen zu vermeiden.

Von der Differentiation der algebraischen Funktionen.

§. 11.

Es sey $y = s + t - u + v - w + A$; s, t, u, v, w seyen gegebne Funktionen von x, und A sey eine beständige Größe. Es wachse x um sein Differential dx, so erhält dadurch s den Zuwachs ds; t den Zuwachs dt; u den Zuwachs du; v den Zuwachs dv; w den Zuwachs dw, und endlich y den Zuwachs dy; die beständige Größe A wird die nämliche geblieben seyn; die Gleichung verwandelt sich also dadurch in

$y + dy = s + ds + t + dt - u - du + v + dv - w - dw + A$;

ziehn wir von dieser Gleichung die ursprüngliche ab, so bleibt übrig $dy = ds + dt - du + dv - dw$.

Das Differential der Summe mehrerer Funktionen von x ist also gleich der Summe der Differentialen dieser Funktionen, und die Zeichen dieser Differentialen sind dieselben, als die Zeichen der Funktionen in der ursprünglichen Gleichung.

In dem Werthe von dy kömmt A nicht mehr vor, das Differential einer beständigen Größe A ist also $= 0$; und dieses war auch leicht vorauszusehen, indem, wenn x den Zuwachs dx erhält, die von x unabhängige beständige Größe dieselbe bleibt, also einen Zuwachs $= 0$ erhält.

Dividiren wir die letzte Gleichung durch dx, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} + \frac{dt}{dx} - \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$; der vorhin in Beziehung auf die Differentialen der Funktionen ausgesprochene Satz gilt also auch in Beziehung auf ihre Differentialquotienten.

§. 12.

Es sey $y = uv$; u und v seyen gegebne Funktionen von x; x erhalte nun den Zuwachs dx, daher u den Zu-

wachs du, v den Zuwachs dv, und y den Zuwachs dy; unsre Gleichung verwandelt sich also in $y + dy = (u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv$; da sich nun $y = uv$ hebt, so ist $dy = udv + vdu + dudv$; es ist aber $udv : dudv = u : du$, und eben so $vdu : dudv = v : dv$; es ist also dudv sowohl in Vergleichung mit udv als mit vdu verschwindend klein, kann daher ohne Irrthum in dem zweiten Gliede der Gleichungen neben diesen beiden Theilsätzen weggelassen werden; es ist also $dy = d(uv) = udv + vdu$.

Das Differential des Produktes zweier Funktionen von x ist also gleich der Summe der Produkte des einen Faktors durch das Differential des andern.

Um das Differential von uv anzudeuten, haben wir uv unter eine Parenthese eingeschlossen und wie gewöhnlich, das d vorgesetzt; denn duv würde bedeuten, daß du durch v zu multipliziren ist.

Wenn der eine Faktor v eine beständige Größe a ist, so ist $da = o$, daher $d(au) = adu$; wenn also der eine Faktor eines Produktes eine beständige Größe ist, so ist das Differential dieses Produktes = der beständigen Größe, multiplizirt durch das Differential des andern Faktors.

§. 13.

Dividiren wir die beiden Glieder der Gleichung $d(uv) = udv + vdu$ durch uv, so ist $\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$.

Um das Differential von tuv zu bestimmen; so erhalten wir, indem wir vorerst t als den einen, uv als den andern Faktor betrachten:

$$\frac{d(tuv)}{tuv} = \frac{dt}{t} + \frac{d(uv)}{uv} = \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v};$$

eben so finden wir

$$\frac{d(stuv)}{stuv} = \frac{ds}{s} + \frac{d(tuv)}{tuv} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v};$$

und eben so $\frac{d(stuvw)}{stuvw} = \frac{d(stuv)}{stuv} + \frac{dw}{w} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$.

Schaffen wir in dieser Gleichung die Nenner weg, so ist $d(stuvw) = tuvwds + suvwdt + stvwdu + stuwdv + stuvdw$.

Wir bestimmen also im allgemeinen das Differential eines Produktes von n Faktoren, indem wir das Produkt von je n — 1 dieser Faktoren durch das Differential des nten Faktors multipliziren und sodann diese sämmtlichen Produkte addiren.

§. 14.

In dem vorigen §. haben wir gesehen, daß

$$\frac{d(stuvw...)}{stuvw...} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + ...$$

Die Anzahl dieser Faktoren sey = n, und ein jeder derselben sey = x, so ist $stuvw... = x.x.x.x.x... = x^n$, die vorige Gleichung wird also:

$$\frac{d(x^n)}{x^n} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + ...$$

$= \frac{n\,dx}{x}$, weil $\frac{dx}{x}$ in dem zweiten Gliede dieser Gleichung eben so oft Theilsatz ist, als Einheiten in der Anzahl n der gleichen Faktoren enthalten sind; multipliziren wir diese Gleichung durch x^n, so wird dieselbe:

$$d(x^n) = n\frac{dx}{x} \cdot x^n = n\,x^{n-1}\,dx.$$

Das Differential der ganzen Potenz einer veränderlichen Größe ist also gleich dem Exponenten dieser Potenz, multiplizirt durch die Potenz der veränderlichen Größe, deren Exponent um die Einheit kleiner ist, und multiplizirt durch das Differential der veränderlichen Größe.

Das Differential der nten Potenz von x werden wir in der Folge durch $d.x^n$ vorstellen, wobei jedoch ja der Punkt nicht wegzulassen ist, weil dx^n die nte Potenz von dx vorstellt.

Darnach können wir nun das Differential einer jeden ganzen rationalen Funktion von x bestimmen.

Es sey $y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, so ist (§. 11.) $dy = Ad.x^4 + Bd.x^3 + Cd.x^2 + D dx = 4Ax^3 dx + 3Bx^2 dx + 2Cx dx + D dx$, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$.

Es sey $y = (Ax^2 + Bx + C)^3$; setzen wir einstweilen $u = Ax^2 + Bx + C$, so ist $y = u^3$, daher $dy = 3u^2 du$; es ist aber $du = d(Ax^2 + Bx + C) = (2Ax + B) dx$; substituiren wir jetzt statt u und du ihre Werthe, so erhalten wir $dy = 3(Ax^2 + Bx + C)^2 (2Ax + B) dx$.

Es sey $y = (Ax^2 + Bx + C)^3 (Dx^2 + Ex + F)^2$; setzen wir einstweilen $Ax^2 + Bx + C = u$, $Dx^2 + Ex + F = v$, so ist $y = u^3 v^2$; daher (§. 12.) $dy = u^3 d.v^2 + v^2 d.u^3 = 2u^3 v dv + 3u^2 v^2 du$; es ist aber $du = d(Ax^2 + Bx + C) = (2Ax + B) dx$, $dv = d(Dx^2 + Ex + F) = (2Dx + E) dx$; setzen wir jetzt statt u und du, v und dv ihre Werthe, so erhalten wir

$dy = 2(Ax^2 + Bx + C)^3 (Dx^2 + Ex + F)(2Dx + E) dx + 3(Ax^2 + Bx + C)^2 (Dx^2 + Ex + F)^2 (2Ax + B) dx$.

§. 15.

Es seyen u und v Funktionen von x; bestimmen wir das Differential des Quotienten $y = \frac{u}{v}$.

Schaffen wir den Nenner weg, so ist $yv = u$; differentiiren wir diese Gleichung, so ist $y dv + v dy = du$, daher $v dy = du - y dv$, folglich $dy = \frac{du}{v} - \frac{y dv}{v}$; setzen

wir statt y wieder seinen Werth $\frac{u}{v}$, so erhalten wir endlich

$$d \cdot \frac{u}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Wir erhalten also das Differential eines Bruches, indem wir den Nenner, multiplizirt durch das Differential des Zählers, vermindern um den Zähler, multiplizirt durch das Differential des Nenners, und diese Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiren.

Wenn der Zähler $u =$ einer beständigen Größe a, so ist $du = da = o$, daher $d \cdot \frac{a}{v} = -\frac{a\,dv}{v^2}$.

Darnach können wir nun das Differential einer jeden gebrochnen rationalen Funktion von x bestimmen.

Es sey, z. B., $y = \frac{a+x}{a-x}$, so ist

$$dy = \frac{(a-x)\,d(a+x) - (a+x)\,d(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{(a-x)\,dx + (a+x)\,dx}{(a-x)^2} = \frac{2a\,dx}{(a-x)^2},$$

weil $d(a+x) = dx$, $d(a-x) = -dx$.

Es sey $y = \frac{Ax^2+Bx+C}{Dx^2+Ex+F}$, so ist

$$dy = \frac{(Dx^2+Ex+F)\,d(Ax^2+Bx+C) - (Ax^2+Bx+C)\,d(Dx^2+Ex+F)}{(Dx^2+Ex+F)^2}$$

$$= \frac{(Dx^2+Ex+F)(2Ax+B)\,dx - (Ax^2+Bx+C)(2Dx+E)\,dx}{(Dx^2+Ex+F)^2}.$$

Wenn der Nenner die Potenz eines Vielsatzes als Faktor enthält, so wird die Differentiation bequemer nach dem folgenden §. vorgenommen.

§. 16.

Wir haben (§. 14.) gesehen, daß wenn $y = x^n$, das Differential $dy = n\,x^{n-1}\,dx$; diesen Satz haben wir jedoch nur für den Fall bewiesen, wo n eine ganze und positive Zahl ist. Ich behaupte nun, daß dieses Differential

auf dieselbe Weise gefunden wird, der Werth von n mag seyn ganz oder gebrochen, positiv oder negativ.

Beweisen wir die Wahrheit dieses Satzes vorerst für den Fall, wenn $n =$ einem positiven Bruche $\frac{r}{s}$.

Aus $y = x^{\frac{r}{s}}$ folgt $y^s = x^r$; differentiiren wir diese Gleichung, so ist $s y^{s-1} dy = r x^{r-1} dx$, daher $dy = \frac{r}{s} \frac{x^{r-1}}{y^{s-1}} dx$; erheben wir die Gleichung $y = x^{\frac{r}{s}}$ zu der Potenz $s - 1$, so ist $y^{s-1} = x^{\frac{r}{s}(s-1)} = x^{r-\frac{r}{s}}$; substituiren wir diesen Werth in die vorige Gleichung, so ist $dy = \frac{r}{s} . x^{r-1} dx : x^{r-\frac{r}{s}} = \frac{r}{s} x^{r-1-r+\frac{r}{s}} dx$ $= \frac{r}{s} x^{\frac{r}{s}-1} dx$; es ist also $d . x^{\frac{r}{s}} = \frac{r}{s} x^{\frac{r}{s}-1} dx$, wie wir beweisen wollten.

Es sey nun $n =$ dem negativen Bruche $-\frac{r}{s}$. Aus $y = x^{-\frac{r}{s}}$ folgt $y^s = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, daher $y^s x^r = 1$; differentiiren wir diese Gleichung, so ist $s y^{s-1} x^r dy + r y^s x^{r-1} dx = o$, daher $y^{s-1} x^r dy = -\frac{r}{s} y^s x^{r-1} dx$; dividiren wir diese Gleichung durch $y^{s-1} x^r$, und bemerken wir, daß $\frac{y^s x^{r-1}}{y^{s-1} x^r} = \frac{y}{x} = x^{-\frac{r}{s}} : x = x^{-\frac{r}{s}-1}$, so erhalten wir endlich $dy = d . x^{-\frac{r}{s}} = -\frac{r}{s} x^{-\frac{r}{s}-1} dx$, wie zu beweisen war.

§. 17.

Darnach können wir nun das Differential einer jeden irrationalen und gebrochnen Funktion von x bestimmen.

Es sey $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, und u eine beliebige Funktion von x, so ist, indem wir $\frac{1}{2}$ statt $\frac{r}{s}$ setzen,

$dy = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$; das Differential einer Quadratwurzel ist also gleich dem Differentialen der Größe unterhalb des Wurzelzeichens, dividirt durch die doppelte Quadratwurzel.

So, z. B., $d \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{d(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - z^2}}$

$= \frac{-2x\,dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Eben so $d \cdot \sqrt{a^4 - a^2x^2 + x^4} = \frac{d(a^4 - a^2x^2 + x^4)}{2\sqrt{a^4 - a^2x^2 + x^4}}$

$= \frac{-2a^2x\,dx + 4x^3\,dx}{2\sqrt{a^4 - a^2x^2 + x^4}} = \frac{(2x^2 - a^2)\,x\,dx}{\sqrt{a^4 - a^2x^2 + x^4}}$.

Es ist $d \cdot \sqrt[3]{a^3 + x^3} = d \cdot (a^3 + x^3)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}(a^3 + x^3)^{\frac{1}{3}-1} d(a^3 + x^3) = \frac{1}{3}(a^3 + x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2\,dx$

$= \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(a^2 + x^2)^2}}$.

Es ist $d \cdot \frac{(a^2x + 2)^2}{(a + x)^3} = d\,[(a^2 + x^2)^2 (a + x)^{-3}]$

$= (a^2 + x^2)^2\, d.(a + x)^{-3} + (a + x)^{-3}\, d \cdot (a^2 + x^2)^2$

$= (a^2 + x^2)^2 \times -3(a + x)^{-4}\, d\,(a + x)$

$+ (a + x)^{-3} \cdot 2(a^2 + x^2)\, d(a^2 + x^2) = -\frac{3(a^2 + x^2)^2\,dx}{(a + x)^4}$

$+ \frac{4(a^2 + x^2)\,x\,dx}{(a + x)^3}$.

Es ist $d \cdot \frac{a^2}{\sqrt[4]{a^4 + x^4}} = a^2\, d \cdot (a^4 + x^4)^{-\frac{1}{4}}$

$= -\frac{1}{4}a^2(a^4 + x^4)^{-\frac{5}{4}}\, d(a^4 + x^4) = -\frac{a^2x^3\,dx}{\sqrt[4]{(a^4 + x^4)^5}}$.

Es ist $d \cdot \frac{\sqrt{a^4 + x^4}}{\sqrt[3]{a^6 + x^6}} = d\,[(a^4 + x^4)^{\frac{1}{2}} (a^6 + x^6)^{-\frac{1}{3}}]$

$$= (a^6+x^6)^{-\frac{1}{3}} d.(a^4+x^4)^{\frac{1}{2}} + (a^4+x^4)^{\frac{1}{2}} d.(a^6+x^6)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= (a^6+^6)^{-\frac{1}{3}} . \tfrac{1}{2}(a^4+x^4)^{-\frac{1}{2}} d(a^4+x^4) + (a^4+x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times -\tfrac{1}{3}(a^6+x^6)^{-\frac{4}{3}} d(a^6+x^6) = \frac{2x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^6+x^6}\sqrt{a^4+x^4}}$$

$$- \frac{2x^5\sqrt{a^4+x^4}\,dx}{\sqrt[3]{(a^6+x^6)^4}}.$$

Es ist $d . \frac{\sqrt[3]{x^6-a^3x^3+a^6}}{\sqrt{x^5+a^5}}$

$$= d\left[(x^6-a^3x^3+a^6)^{\frac{1}{3}}(x^5+a^5)^{-\frac{1}{5}}\right]$$

$$= (a^5+x^5)^{-\frac{1}{5}}\ d . (x^6-a^3x^3+a^6)^{\frac{1}{3}}$$

$$+ (x^6-a^3x^3+a^6)^{\frac{1}{3}}\ d . (a^5+x^5)^{-\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{(2x^3-a^3)\,x^2\,dx}{\sqrt[5]{a^5+x^5}\ \sqrt[3]{x^6-a^3x^3+a^6)^2}}$$

$$- \frac{x^4\sqrt[3]{x^6-a^3x^3+a^6}\ .\ dx}{\sqrt[5]{(a^5+x^5)^6}}.$$

Von der Differentiation der Exponential- und logarithmischen Funktionen.

§. 18.

Es sey $y = \log x$, und a die Basis des Systemes, welchem dieser Logarithmus angehört, so ist $x = a^y$. Es wachse x um sein Differential dx, daher y um sein Differential dy, so ist $x+dx = a^{y+dy} = a^y a^{dy}$; ziehen wir von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so erhalten wir $dx = a^y a^{dy} - a^y = a^y(a^{dy}-1)$; es ist also

$\frac{dx}{dy} = \frac{a^{dy}-1}{dy} . a^y$. Ich behaupte nun, daß der Werth von $\frac{a^{dy}-1}{dy}$ ein beständiger nur von a abhängiger ist.

Um dieses zu beweisen, so sey $a = 1+b$; es ist dann

$$a^{dy} = (1+b)^{dy} 1 + dy \,.\, b + \frac{dy(dy-1)}{1\,.\,2}\, b^2 + \frac{dy\,(dy-1)\,(dy-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, b^3 + \frac{dy(dy-1)(dy-2)(dy-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\, b^4 + \ldots$$

(wir werden noch in der Folge die Wahrheit des binomischen Lehrsatzes im allgemeinen beweisen).

Bringen wir 1 in das erste Glied der Gleichung, dividiren wir dieselbe durch dy, und schreiben wir überall in deren zweitem Gliede $-(1-dy)$ statt $dy-1$; $-(2-dy)$ statt $dy-2$; $-(3-dy)$ statt $dy-3$, u. s. w., so ist

$$\frac{a^{dy}-1}{dy} = b - \frac{1-dy}{2}\, b^2 + \frac{(1-dy)\,(2-dy)}{2\,.\,3}\, b^3 - \frac{(1-dy)\,(2-dy)\,(3-dy)}{2\,.\,3\,.\,4}\, b^4 + \ldots$$

Es ist also, indem wir das zweite Glied der Gleichung nach den Potenzen von dy ordnen, $\frac{a^{dy}-1}{dy} =$

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6} + \ldots$$
$$+ dy \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{2} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ dy^2 \left(\frac{b^3}{6} - \ldots\ldots\ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da nun diejenigen Theile des zweiten Gliedes der Gleichung, welche dy und die Potenzen von dy als Faktoren enthalten, neben dem ersten Theile verschwinden, so ist

$$\frac{a^{dy}-1}{dy} = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \ldots =$$

(indem wir statt b wieder seinen Werth $a-1$ substituiren)

$$a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots = A,$$

indem wir, um abzukürzen, diesen nur von a abhängigen Werth durch A vorstellen.

Setzen wir jetzt in den Ausdruck von $\frac{dx}{dy}$ statt $\frac{a^{dy}-1}{dy}$ seinen Werth, so ist $\frac{dx}{dy} = A \,.\, a^y$, daher $dx = A \,.\, a^y\, dy$.

Den Werth von A können wir näherungsweise bestimmen, wenn wir statt dy einen sehr kleinen Bruch setzen. Es sey z. B. a = 10 = der Basis des Brigg'schen Logarithmensystems, so ist der entsprechende Werth von $A = \frac{10^{dy} - 1}{dy}$; setzen wir dy = 0,00001, so ist 10^{dy} = der Zahl, welche 0,00001 zum Brigg'schen Logarithmen hat, = 1,000023026 ....; es ist also dieses $A = \frac{1,000023026 - 1}{0,00001} = \frac{0,000023026}{0,00001} = 2,3026 \ldots$. In der Folge werden wir sehen, auf welche Weise wir diesen Werth mit einer beliebigen Genauigkeit bestimmen können.

§. 19.

Wenn also y = log. x, und wenn die Basis dieses Logarithmensystems = a, d. h., wenn $x = a^y$, so ist $dx = A \cdot a^y\, dy$, und der Werth von a ist eine Funktion der Basis a.

Setzen wir in diese Differentialgleichung statt a^y wieder seinen Werth x, und statt dy seinen Werth d log. x, so wird dieselbe dx = A x d log. x; es ist also d log. x $= \frac{1}{A}\frac{dx}{x} = m\frac{dx}{x}$, indem wir $\frac{1}{A} = m$ setzen.

Dieses m, welches eine Funktion der Basis a ist, nennt man den Modulus des zugehörigen Logarithmensystems; z. B. für das Brigg'sche Logarithmensystem ist $m = \frac{1}{2,3026 \ldots} = 0,43429 \ldots$

Dasjenige Logarithmensystem, für welches der Modulus m = 1, nennt man das natürliche Logarithmensystem; um die Basis dieses Systems einstweilen näherungsweise zu bestimmen, so bemerken wir, daß auch das zugehörige $A = \frac{1}{m} = 1$, also $\frac{a^{dy} - 1}{dy} = 1$, $a^{dy} = 1 + dy$; setzen wir nun statt dy einen sehr kleinen Bruch 0,000001, so ist $a^{0,000001} = 1,000001$,

also 0,000001 log. brigg. a = log. brigg. 1,000001 = 0,00000043429 ....., folglich

$$\log.\ \text{brigg.}\ a = \frac{0{,}00000043429}{0{,}000001} = 0{,}43429\ \ldots,$$ folglich

$a = 2{,}71828\ldots$

In der Folge werden wir immer durch e die Basis des natürlichen Logarithmensystems vorstellen; es ist also $e = 2{,}71828\ldots$; weiterhin werden wir sehen, auf welche Weise wir diesen Werth direkt mit einer beliebigen Genauigkeit zu bestimmen im Stande sind.

Wenn also $y = \log.\ \text{nat.}\ x$, d. h., wenn $x = e^y$, so ist der Modulus $m = 1$, und $d \log. x = \frac{dx}{x}$; die Logarithmen, welche in der Folge vorkommen, werden immer natürliche Logarithmen seyn, wenn wir es nicht anders besonders erwähnen.

§. 20.

Es sey $y = \log. X$, und X eine gegebene Funktion von x, so ist $dy = d \log. X = \frac{dX}{X}$.

Es sey, z. B., $y = \log.(a^2 - x^2)$, so ist

$$dy = \frac{d(a^2 - x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{-2\,x\,dx}{a^2 - x^2}$$

Es sey $y = \log. \frac{\sqrt[4]{x^4 - a^2x^2 + a^4}}{\sqrt[3]{x^3 + a^3}}$

$$= \tfrac{1}{4} \log.(x^4 - a^2x^2 + a^4) - \tfrac{1}{3} \log.(x^3 + a^3),$$

so ist $dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{d(x^4 - a^2x^2 + a^4)}{x^4 - a^2x^2 + a^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{d(a^3 + x^3)}{a^3 + x^3}$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2x^2 - a)\,x\,dx}{x^4 - a^2x^2 + a^4} - \frac{x^2\,dx}{a^3 + x^3}.$$

Es sey $y = \log. \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \log. x - \frac{1}{2} \log.(1 + x^2)$,

so ist $dy = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2}$

$= \frac{(1+x^2)\,dx - x^2\,dx}{x\,(1+x^2)} = \frac{dx}{x\,(1+x^2)}$.

Es sey $y = \log.\,(x + \sqrt{1+x^2})$, so ist $dy =$

$\frac{d\,(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

= (indem wir den Zähler und Nenner durch $\sqrt{1+x^2}$ multipliziren) $\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)\,dx}{(x+\sqrt{1+x^2})\,\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Es sey $y = \log.\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} =$

$\log.\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) - \log.\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$, so ist

$dy = \frac{d\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} - \frac{d\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$= \frac{\frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} - \frac{\frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} =$

(indem wir die Nenner in den Theilsätzen der Zähler wegschaffen)

$\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})\,dx}{2\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} - \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\,dx}{2\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

= (indem wir die beiden Brüche unter einerlei Benennung bringen)

$-\frac{[(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^2+(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2]\,dx}{2\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$= -\frac{4\,dx}{4x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

§. 21.

Es sey $y = (\log.\,x)^n$; setzen wir einstweilen $\log.\,x = u$, so ist $y = u^n$, daher $dy = d\,.\,u^n = n\,u^{n-1}\,du$;

es ist aber $du = d \log. x = \frac{dx}{x}$, also $dy = d.(\log. x)^n$

$= n \log. x^{n-1} . \frac{dx}{x}$.

Es sey $y = \log. \log. x$; setzen wir $\log. x = u$, so ist $y = \log. u$, daher $dy = \frac{du}{u}$; es ist aber du

$= d . \log. x = \frac{dx}{x}$, also $dy = \frac{dx}{x \log. x}$.

Es sey $y = \log. \log. \log. x$; setzen wir wieder $\log. x = u$, so ist $y = \log. \log. u$, daher nach dem Vorhergehenden $dy = \frac{du}{u \log. u}$; es ist aber $du = \frac{dx}{x}$, folglich

$dy = \frac{dx}{x \log. x \log. \log. x}$.

Auf dieselbe Weise finden wir $d\,lll\,x = \frac{dx}{x\,l\,x\,ll\,x\,lll\,x}$,

u. s. w.

§. 22.

Es sey $y = z^x$, und z eine Funktion von x; nehmen wir die Logarithmen von beiden Gliedern der Gleichung, so ist $\log. y = x \log. z$, folglich $d \log. y = \log. z\, dx + x\, d \log. z$, $\frac{dy}{y} = \log. z\, dx + \frac{x\, dz}{z}$, daher

$$dy = y\left(\log. z . dx + \frac{x\, dz}{z}\right),$$

$$\text{also } d . z^x = z^x \left(\log. z\, dx + \frac{x\, dz}{z}\right).$$

Wenn $z =$ einer beständigen Größe a, so ist $dz = da = 0$; es ist also $d . a^x = a^x \log. a\, dx$. Wir haben aber auch (§. 18.) gesehen, daß $d . a^x = A\, a^x\, dx$, welches $A = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots$; es ist also dieses $A = \log. nat. a$.

Wenn $a =$ der Basis e des natürlichen Logarithmen-

systems, so ist $\log. a = \log. e = 1$; es ist also $d . e^x = e^x dx$.

Auf eine ähnliche Weise bestimmen wir das Differential einer jeden andern Exponentialfunktion von x; es sey, z. B., $y = v^{z^x}$, so ist $\log. y = z^x \log. v$, daher $\frac{dy}{y} = \log. v\, d . z^x + z^x . \frac{dv}{v}$; setzen wir statt $d . z^x$ seinen vorhin gefundnen Werth, so erhalten wir $dy = y\left[\log. v\left(\log. z\, dx + \frac{x\, dz}{z}\right) z^x + z^x . \frac{dv}{v}\right]$; es ist also

$$d . v^{z^x} = z^x . v^{z^x}\left[\log. v\left(\log. z . dx + \frac{x\, dz}{z}\right) + \frac{dv}{v}\right].$$

Von der Differentiation der trigonometrischen Funktionen.

§. 23.

Es sey (Fig. 1.) AD ein Kreisbogen, kleiner als ein Quadrat, und beschrieben mit dem Halbmesser $OD = OA = 1$; AC sey seine Tangente, und DE sein Sinus. Vorerst ist die Chorde AD kleiner als der Bogen AD; der Sinus DE ist aber kleiner als die Chorde AD; es ist also der Sinus DE kleiner, als der Bogen AD. Führen wir in D die Tangente DB, welche CA in B schneidet, so ist $CB > DB$; fügen wir auf beiden Seiten AB zu, so erhalten wir $CA > DB + BA$; es ist aber $DB + BA >$ als der Bogen AD, also um so vielmehr die Tangente $AC >$ als der Bogen AD. Wenn also ein Bogen kleiner als ein Quadrant ist, so ist er kleiner als seine Tangente, und größer als sein Sinus.

Es sey u ein beliebiger Bogen, so ist, indem wir immer den Sinus totus $= 1$ setzen, $1 - \cos. u = \text{sin. vers. } u = 2 \sin. \frac{1}{2} u^2$; es ist also $1 - \cos. u : \sin. \frac{1}{2} u = \sin \frac{1}{2} u : \frac{1}{2}$.

Wenn nun der Bogen u verschwindend klein ist, so ist auch $\sin. \frac{1}{2} u$ verschwindend klein gegen $\frac{1}{2}$; aus der vorigen Proportion folgt also, daß auch dann $1 - \cos. u$ ver-

schwindend klein gegen sin. $\frac{1}{2}$ u ist. Eine solche Größe, welche in Vergleich mit einer verschwindend kleinen Größe verschwindend klein ist, nennen wir eine verschwindend kleine Größe von der zweiten Ordnung, in Vergleichung mit einer endlichen Größe.

Wenn also ein Bogen verschwindend klein ist, so ist die Differenz des Sinus totus und des Cosinus verschwindend klein gegen diesen Bogen, es kann also diese Differenz ohne Irrthum = o gesetzt werden; es kann also der Cosinus eines verschwindend kleinen Bogens = dem Sinus totus gesetzt werden.

Es ist die Differenz $\text{tg. u} - \text{sin. u} = \text{tg. u}\left(1 - \frac{\text{sin. u}}{\text{tg. u}}\right)$ $= \text{tg. u}\ (1 - \text{cos. u})$, woraus die Proportion folgt tg. u — sin. u : tg. u = 1 — cos. u : 1. Nun haben wir so eben gesehen, daß 1 — cos. u verschwindend klein von der zweiten Ordnung in Vergleich mit 1 ist; wenn der Bogen u verschwindend klein ist; es ist also auch tg. u — sin. u verschwindend klein vor der zweiten Ordnung in Vergleich mit tg. u; es kann also diese Differenz ohne Irrthum = o, d. h., sin. u = tg. u, gesetzt werden.

Nun haben wir aber gesehen, daß der Bogen u $>$ sin. u und $<$ tg. u; ein verschwindend kleiner Bogen kann also ohne Irrthum seinem Sinus und seiner Tangente, und der Cosinus desselben dem Sinus totus, gleich gesetzt werden.

In der Folge werden wir immer annehmen, daß der einen Winkel am Mittelpunkte messende Bogen mit einem Halbmesser = 1 beschrieben, und daß seine Größe in Theilen dieses Halbmessers ausgedrückt ist; die halbe Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser = 1, und welche = 3,14 ..... werden wir immer durch π, also durch $\frac{\pi}{2}$ den Quadranten vorstellen.

§. 24

Es sey $y = \sin. x$; x erhalte den verschwindend kleinen Zuwachs dx, also y den verschwindend kleinen Zuwachs dy, so ist

$y + dy = \sin.(x + dx) = \sin. x \cos. dx + \cos. x \sin. dx$;

nun folgt aber aus dem vorigen §., daß $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$, es ist also $y + dy = \sin. x + \cos. x\, dx$; ziehen wir von dieser Gleichung die ursprüngliche ab, so bleibt übrig $dy = d.\sin. x = \cos. x\, dx$; das Differential des Sinus eines Bogens ist also gleich dem Cosinus desselben, multiplizirt durch das Differential des Bogens.

Es sey $y = \cos. x$; x erhalte den verschwindend kleinen Zuwachs dx, also y den verschwindend kleinen Zuwachs dy, so ist $y+dy = \cos.(x+dx) = \cos. x \cos. dx - \sin. x \sin. dx$, daher, weil wieder $\cos. dx = 1$, $\sin. dx = dx$, $y+dy = \cos. x - \sin. x\, dx$; ziehen wir von dieser Gleichung die ursprüngliche ab, so bleibt übrig $dy = -\sin. x\, dx$; das Differential des Cosinus eines Bogens ist also gleich dem negativen Produkte des Sinus desselben durch das Differential des Bogens.

Es ist $\text{tg}. x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$, daher (§. 15.)

$$d.\,\text{tg}.\, x = \frac{\cos. x\,.\,d.\sin. x - \sin. x\,.\,d\cos. x}{\cos. x^2}$$

$$= \frac{\cos. x\,.\,\cos. x\, dx - \sin. x \times -\sin. x\, dx}{\cos. x^2}$$

$$= \frac{(\cos. x^2 + \sin. x^2)\, dx}{\cos. x^2}, \text{ daher, weil } \sin. x^2 + \cos. x^2 = 1,$$

$$d\,\text{tg}.\, x = \frac{dx}{\cos. x^2}.$$

Es ist $\cot. x = \frac{\cos. x}{\sin. x}$, daher

$$d\cot. x = \frac{\sin. x\,.\,d.\,\cos. x - \cos. x\,.\,d.\sin. x}{\sin. x^2}$$

$$= \frac{\sin. x \times - \sin. x\, dx - \cos. x \cos. x\, dx}{\sin. x^2}$$

$$= - \frac{dx(\sin. x^2 + \cos. x^2)}{\sin. x^2}; \text{ es ist also } d \cot. x = - \frac{dx}{\sin. x^2}.$$

Es ist $\sec. x = \frac{1}{\cos. x}$, daher

$$d \sec. x = d . \frac{1}{\cos. x} = - \frac{d \cos. x}{\cos. x^2} = \frac{\sin. x\, dx}{\cos. x^2};$$

da nun $\frac{\sin. x}{\cos. x} = tg. x$, so ist $d \sec. x = \frac{tg. x . dx}{\cos. x}$.

Es ist $\operatorname{cosec}. x = \frac{1}{\sin. x}$, daher

$$d \operatorname{cosec}. x = d . \frac{1}{\sin. x} = - \frac{d \sin. x}{\sin. x^2}$$

$$= - \frac{\cos. x\, dx}{\sin. x^2}; \text{ da nun } \frac{\cos. x}{\sin. x} = \cot. x, \text{ so ist}$$

$$d \operatorname{cosec}. x = - \frac{\cot. x\, dx}{\sin. x}.$$

§. 25.

Aus diesen Formeln können wir nun leicht die folgenden herleiten.

Es ist (§. 20.) $d \log. \sin. x = \frac{d \sin. x}{\sin. x}$

$$= \frac{\cos. x\, dx}{\sin. x} = \cot. x\, dx.$$

Es ist $d \log. \cos. x = \frac{d \cos. x}{\cos. x} = - \frac{\sin. x\, dx}{\cos. x}$

$$= - tg. x\, dx.$$

Es ist $d . \log. tg. x = \frac{d tg. x}{tg. x} = \frac{dx}{\cos. x^2 \, tg. x}$

$$= \frac{2\, dx}{\sin. 2x}, \text{ weil } \cos. x^2 \; tg. x = \cos. x . \cos. x \, tg. x$$

$$= \cos. x . \sin. x = \frac{\sin. 2x}{2}.$$

Es ist $d \log. \cot. x = \frac{d \cot. x}{\cot. x} = - \frac{dx}{\sin. x^2 \cot. x}$

$= - \frac{2\,dx}{\sin. 2x}$, weil $\sin. x^2 \cot. x = \sin. x \,.\, \sin. x \cot x$

$= \sin. x \cos. x = \frac{\sin. 2x}{2}$.

Es ist $d \log. \sec. x = d \log. \frac{1}{\cos. x} = - d \log. \cos. x$

also $= tg. x \,.\, dx$.

Es ist $d \log. \operatorname{cosec}. x = d \log. \frac{1}{\sin. x} = - d \log. \sin. x$

also $= - \cot. x\, dx$.

§. 26.

Wir bezeichnen im allgemeinen durch **arc. sin. x** den Bogen, dessen Sinus **x** ist; durch **arc. cos. x** den Bogen, dessen Cosinus **x** ist; durch **arc. sin. vers. x** den Bogen, dessen Sinus versus **x** ist, u. s. w.

Es sey $x = \sin. u$, also $u = arc. sin. x$, so ist nach §. 24. $dx = \cos. u\, du$, daher $du = \frac{dx}{\cos. u}$; es ist aber $\cos. u = \sqrt{1 - \sin. u^2} = \sqrt{1 - x^2}$, folglich

$du = d \,.\, arc. sin. x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Es sey $x = \cos. u$, also $u = arc. cos. x$, so ist $dx = - \sin. u\, du$, daher $du = - \frac{dx}{\sin. u}$; es ist aber $\sin. u = \sqrt{1 - \cos. u^2} = \sqrt{1 - x^2}$, folglich $du = d \,.\, arc. cos. x = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Es sey $x = tg. u$, also $u = arc. tg. x$, so ist $dx = \frac{du}{\cos. u^2}$, daher $du = dx \cos. u^2$; es ist aber

$$\cos. u^2 = \frac{1}{\sec. u^2} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}.u^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{also } du = \mathrm{d}\ \text{arc. tg. } x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Es sey $x = \cot. u$, also $u = \text{arc. cot. } x$, so ist

$$dx = -\frac{du}{\sin. u^2}, \text{ daher } du = -dx \sin. u^2;$$ es ist aber

$$\sin. u^2 = \frac{1}{\text{cosec. } u^2} = \frac{1}{1+\cot. u^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{folglich } du = \mathrm{d}\ \text{arc. cot. } x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Es sey $x = \sec. u$, also $u = \text{arc. sec. } x$, so ist

$$dx = \frac{\sin. u\, du}{\cos. u^2}, \text{ folglich } du = \frac{dx \cos. u^2}{\sin. u};$$

es ist aber $\cos. u^2 = \frac{1}{\sec. u^2} = \frac{1}{x^2}$, und

$$\sin. u = \sqrt{1-\cos. u^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

$$\text{folglich } \frac{\cos. u^2}{\sin. u} = \frac{1}{x^2} : \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{es ist also } du = \mathrm{d}\ \text{arc. sec. } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Es sey $x = \text{cosec. } u$, also $u = \text{arc. cosec. } x$, so ist

$$dx = -\frac{\cos. u\, du}{\sin. u^2}, \text{ daher } du = -\frac{dx \sin. u^2}{\cos. u};$$

$$\text{es ist aber } \sin. u^2 = \frac{1}{\text{cosec. } u^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\text{und } \cos. u = \sqrt{1-\sin. u^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

$$\text{folglich } \frac{\sin. u^2}{\cos. u} = \frac{1}{x^2} : \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{es ist also } du = \mathrm{d}\ \text{arc. cosec. } x = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Es sey $x = \text{sin. vers. } u = 1 - \text{cos. } u$, also $u = \text{arc. sin. vers. } x$, so ist $dx = -\,d \text{ cos. } u = \text{sin. } u\, du$, folglich $du = \frac{dx}{\text{sin. } x^2}$; es ist aber $\text{cos. } u = 1 - \text{sin. vers. } u = 1 - x$, daher $\text{sin. } u = \sqrt{1 - \text{cos. } u^2} = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x - x^2}$, folglich $du = d \text{ arc. sin. vers. } x = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

§. 27.

Darnach können wir nun das Differential eines jeden Ausdruckes, welcher trigonometrische Funktionen von x enthält, bestimmen.

Es sey, z. B., $y = \text{sin. } x^m \text{ cos. } x^n$, so ist

$$dy = \text{cos. } x^n \, d \,.\, \text{sin. } x^m + \text{sin. } x^m \, d \,.\, \text{cos. } x^n$$
$$= m \text{ cos. } x^n \text{ sin. } x^{m-1} \text{ cos. } x \, dx$$
$$+ n \text{ sin. } x^m \times - \text{ cos. } x^{n-1} \text{ sin. } x \, dx$$
$$= m \text{ cos. } x^{n+1} \text{ sin. } x^{m-1} \, dx - n \text{ cos. } x^{n-1} \text{ sin. } x^{m+1} \, dx.$$

Es sey $y = e^{\text{sin. } x}$, so ist

$$dy = e^{\text{sin. } x} \, d \text{ sin. } x = e^{\text{sin. } x} \text{ cos. } x \, dx.$$

Es sey $y = \text{sin. } mx$, so ist

$dy = d \text{ sin. } mx = \text{cos. } mx \,.\, m\, dx\, m \text{ cos. } mx\, dx$; eben so finden wir $d \text{ cos. } mx = -m \text{ sin. } mx\, dx$.

Es sey $y = \text{arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit

$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{sin } y$; differentiiren wir diese Gleichung, so ist $d \,.\, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d \,.\, \text{sin. } y = \text{cos. } y \, dy$;

es ist aber $d \,.\, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d \left[x\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

$$= (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx + x^2 \,(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx$$
$$= \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^2\, dx}{(a^2 - x^2)\,\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$= \frac{a^2\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$; es ist ferner

$\cos.\ y = \sqrt{1-\sin.\ y^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

substituiren wir diese Werthe, so ist

$$\frac{a^2\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy;$$

es ist also $dy = \frac{a^2\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-2x^2}}$.

Von den höhern Differentialquotienten, und von dem Taylor'schen Lehrsatze.

§. 28.

Es sey y eine Funktion von x, stellen wir ihren Differentialquotienten durch p vor, so ist $\frac{dy}{dx} = p$, und $dy = p\,dx$.

Dieses p ist abermals eine Funktion von x; stellen wir ihren Differentialquotienten durch q vor, so ist $q = \frac{dp}{dx}$, und $dp = q\,dx$.

Dieses q ist abermals eine Funktion von x; stellen wir ihren Differentialquotienten durch r vor, so ist $\frac{dq}{dx} = r$, und $dq = r\,dx$.

Eben so setzen wir den Differentialquotienten $\frac{dr}{dx} = s$, $\frac{ds}{dx} = t$, u. s. w.

Den Differentialquotienten q des Differentialquotienten p nennen wir den zweiten Differentialquotienten; eben so den Differentialquotienten r den dritten, den Differentialquotienten s den vierten u. s. w., der ursprünglichen Funktion y von x.

Indem wir die Gleichung $dy = p\,dx$ differentiiren, unter der Voraussetzung, daß dx sich nicht ändert, so erhalten wir $ddy = dp \,.\, dx$; das Differential des Differentials von y nennen wir das zweite Differential von y, und wir stellen dasselbe durch d^2y vor; setzen wir statt p seinen Werth $q\,dx$, so ist

$d^2y = q\,dx \,.\, dx = q\,dx^2$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = q$.

Aus dieser Gleichung folgt $d^2y : dx = dx : q$; da nun dx in Vergleichung mit q verschwindend klein ist, so folgt aus dieser Proportion, daß auch d^2y in Vergleichung mit dx verschwindend klein ist; dagegen der Quotient von d^2y durch dx^2 ist ein endlicher, und $= q$.

Differentiiren wir die Gleichung $d^2y = q\,dx^2$, so ist, weil nach unsrer Voraussetzung dx, also auch dx^2 sich nicht ändert, $d \,.\, d^2y = dq\,dx^2$; das Differential des zweiten Differentials von y nennen wir das dritte Differential von y, und wir stellen dasselbe durch d^3y vor; setzen wir ferner statt dq seinen Werth $r\,dx$, so ist $d^3y = r\,dx \,.\, dx^2$ $= r\,dx^3$, daher $\frac{d^3y}{dx^3} = r$. Aus dieser Gleichung folgt $d^3y : dx^2 = dx : r$; da nun dx in Vergleichung mit r verschwindend klein ist, so ist auch d^3y in Vergleichung mit dx^2 verschwindend klein; dagegen der Quotient von d^3y durch dx^3 ist ein endlicher, und $= r$.

Differentiiren wir die Gleichung $d^3y = r\,dx^3$, so ist $d \,.\, d^3y = dr\,dx^3$; das Differential des dritten Differentials von y nennen wir das vierte Differential von y, und wir bezeichnen dasselbe analog durch d^4y; setzen wir statt dr seinen Werth $s\,dx$, so ist $d^4y = s\,dx \,.\, dx^3 = s\,dx^4$, daher $\frac{d^4y}{dx^4} = s$. Aus dieser Gleichung folgt $d^4y : dx^3 = dx : s$; da nun dx in Vergleichung mit s verschwindend klein ist, so ist auch d^4y in Vergleichung mit dx^3 verschwindend klein; dagegen der Quotient von d^4y durch dx^4 ist ein endlicher, und $= s$.

Auf dieselbe Weise finden wir $d^5 y = ds\, dx^4 = t\, dx^5$, daher $\frac{d^5 y}{dx^5} = t$, u. s. w.

§. 29.

Es sey $y = a x^n$, so ist $dy = an x^{n-1} dx$, daher der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = p = an\, x^{n-1}$.

Differentiiren wir diese Gleichung abermals, so ist $d^2 y = an(n-1)\, x^{n-1}\, dx^2$, daher der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2} = q = an(n-1)\, x^{n-2}$.

Differentiiren wir diese Gleichung abermals, so ist $d^3 y = an(n-1)(n-2)\, x^{n-3}\, dx^3$, daher $\frac{d^3 y}{dx^3} = r = an(n-1)(n-2)\, x^{n-3}$.

Indem wir die Differentiationen auf dieselbe Weise fortsetzen, so finden wir den mten Differentialquotienten

$$\frac{d^m y}{dx^m} = an(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\, x^{n-m};$$

wenn also n eine ganze Zahl ist, so ist der nte Differentialquotient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = an(n-1)\ldots(n-n+1)\, x^{n-n}$$

$$= an(n-1)\ldots\ldots 2.1,$$ also der $(n+1)$te Differentialquotient $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = o$.

Es sey $y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$,

so ist $\frac{dy}{dx} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4 . 3Ax^2 + 3 . 2Bx + 2C,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4 . 3 . 2Ax + 3 . 2B,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 4 . 3 . 2A,\ \frac{d^5 y}{dx^5} = o.$$

Es sey $y = P . (x-a)^n$, P sey eine Funktion von x, welche den Faktor $x - a$ nicht enthält, so ist, indem wir

diese Gleichung differentiiren, und sodann ihre beiden Glieder durch dx dividiren,

$$\frac{dy}{dx} = nP(x-a)^{n-1} + (x-a)^n \cdot \frac{dP}{dx} =$$

$$(x-a)^{n-1}\left[nP + (x-a) \cdot \frac{dP}{dx}\right] = Q(x-a)^{n-1},$$ indem wir die Funktion $(x-a)\frac{dP}{dx} + nP$ von x, welche $x-a$ nicht als Faktor ihrer beiden Theilsätze enthält, durch Q vorstellen.

Differentiiren wir diese Gleichung abermals, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (n-1)\,Q(x-a)^{n-2} + (x-a)^{n-1} \cdot \frac{dQ}{dx}$$

$$= (x-a)^{n-2}\left[(n-1)\,Q + (x-a) \cdot \frac{dQ}{dx}\right] = R(x-a)^{n-2},$$ indem wir die Funktion $(n-1)\,Q + (x-a) \cdot \frac{dQ}{dx}$ von x, welche $x-a$ nicht als Faktor ihrer beiden Theilsätze enthält, durch R vorstellen.

Differentiiren wir wieder diese Gleichung, so ist

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (n-2)\,R(x-a)^{n-3} + (x-a)^{n-2} \cdot \frac{dR}{dx}$$

$$= (x-a)^{n-3}\left[(n-2)R + (x-a) \cdot \frac{dR}{dx}\right] = S(x-a)^{n-3},$$

welches S wieder $= (n-2)\,R + (x-a) \cdot \frac{dR}{dx}$.

Indem wir auf dieselbe Weise zu differentiiren fortfahren, so erhalten wir im allgemeinen $\frac{d^my}{dx^m} = V(x-a)^{n-m}$, welche Funktion V von x den Faktor $x-a$ nicht enthält.

Wenn also eine Funktion von x den Faktor $(x-a)^n$ enthält, so ist in ihrem ersten Differentialquotienten der Faktor $(x-a)^{n-1}$, in ihrem zweiten Differentialquotienten der Faktor $(x-a)^{n-2}$, in ihrem dritten Differentialquotienten der Faktor $(x-a)^{n-3}$, und im allgemeinen in ihrem mten Differentialquotienten der Faktor $(x-a)^{n-m}$ derge-

stalt enthalten, daß der andre Faktor des Differentialquotienten durch $x-a$ nicht theilbar ist; wenn also n eine ganze Zahl ist, so ist in dem $n$ten Differentialquotienten der Faktor $(x-a)^{n-n} = (x-a)^0 = 1$ enthalten, d. h., $\frac{d^n y}{dx^n}$ enthält diesen Faktor $x-a$ nicht mehr; um so viel weniger wird dieser Faktor in den höhern Differentialquotienten enthalten seyn.

§. 30.

Wir haben (§. 7.) gesehen, daß, wenn $y = fx$, und wenn x den Zuwachs c erhält, der entsprechende Werth von y, $y' = f(x+c)$, ausgedrückt ist durch die Reihe $f(x+c) = fx + Pc + Qc^2 + Rc^3 + Sc^4 \ldots (1)$, in welcher $P, Q, R, S \ldots$ Funktionen von x bedeuten; wir haben ferner gesehen, daß $P = \frac{dy}{dx}$; sehen wir nun, auf welche Weise wir diese andern Funktionen von x aus der ursprünglichen Funktion ableiten.

Angenommen also, daß x abermals einen Zuwachs h erhalte, so verwandelt sich $f(x+c)$ in $f(x+c+h)$; in dem zweiten Gliede der Gleichung verwandelt sich

fx in $fx + Ph + Qh^2 + Rh^3 + Sh^4 \ldots$ $\left(\text{welches } P = \frac{dy}{dx}\right)$

P in $P + \frac{dP}{dx} h + P'' h^2 + P''' h^3 + \ldots$

Q in $Q + \frac{dQ}{dx} h + Q'' h^2 + \ldots\ldots\ldots$

R in $R + \frac{dR}{dx} h + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

S in $S + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

u. s. w.; setzen wir diese Werthe, so erhalten wir (2) . . .

$$f(x+c+h)=fx+Ph+Qh^2+Rh^3+Sh^4+\ldots$$
$$+Pc+\frac{dP}{dx}ch+P''ch^2+P'''ch^3+\ldots$$
$$+Qc^2+\frac{dQ}{dx}c^2h+Q''c^2h^2+\ldots$$
$$+Rc^3+\frac{dR}{dx}c^3h+\ldots$$
$$+Sc^4+\ldots.$$
$$+\ldots.$$

Wir finden aber auch die Entwickelung von $f(x+c+h)$, indem wir in die Gleichung (1) überall statt c hinschreiben $c+h$; dadurch verwandelt sich dieselbe in $f(x+c+h)$ $=fx+P(ch+c)+Q(h+c)^2+R(h+c)^3+S(h+c)^4+\ldots$

Vollziehen wir die angedeuteten Erhebungen zu den ganzen Exponenten, so erhalten wir (3) ... $f(x+c+h)=$
$fx+Ph+Qh^2+Rh^3+Sh^4+\ldots.$
$+Pc+2Qhc+3Rh^2c+4Sh^3c+\ldots.$
$+Qc^2+3Rhc^2+6Sh^2c^2+\ldots.$
$+Rc^3+4Shc^3+\ldots.$
$+Sc^4+\ldots.$
$+\ldots.$

Die Entwickelungen (2) und (3) müssen in allen ihren Theilen mit einander übereinstimmen; es müssen also die Coeffizienten der Theilsätze, in welchen die Potenzen von h und c dieselben sind, gleichfalls dieselben seyn; hieraus folgt vorerst $fx=fx$, sodann $P=P$, sodann

$Q=Q$, $2Q=\frac{dP}{dx}$, $Q=Q$; es ist also $Q=\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$

$=\frac{1}{2}\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$; sodann $R=R$, $P''=3R$,

$\frac{dQ}{dx}=3R$, $R=R$; es ist also $R=\frac{1}{3}\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$;

sodann $S=S$, $P'''=4S$, $Q''=6S$, $\frac{dR}{dx}=4S$, $S=S$;

es ist also $S=\frac{1}{4}\frac{dR}{dx}=\frac{1}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}$, u. s. w.; substi-

tuiren wir nun die Werthe von P, Q, R, S .... in die Gleichung (1), so erhalten wir die gesuchte Entwickelung von $y' = f(x+c) =$

$$fx + \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{c^2}{1.2.3.4} + ..$$

Dieser Satz ist nach seinem ersten Entdecker der Taylor'sche Lehrsatz benannt worden.

§. 31.

Aus diesem Satze können wir leicht den Beweis des binomischen Lehrsatzes für einen jeden Exponenten herleiten.

Es sey $y = x^n$, so ist $y' = f(x+c) = (x+c)^n$; es ist also (§. 16.) $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)\,x^{n-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

$= n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, $\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$,....;

setzen wir statt y und statt der Differentialquotienten dieser Funktion ihre Werthe, so erhalten wir die gesuchte Entwickelung von $f(x+c) = (x+c)^n =$

$$x^n + nx^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}c^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}c^4 + ...$$

§. 32.

Vorzüglich anwendbar ist der Taylor'sche Lehrsatz zur Entwickelung der transzendenten Funktionen in Reihen.

Es sey $y = fx = a^x$, so ist $y' = f(x+c) = a^{x+c}$, $\frac{dy}{dx} =$ (§. 22.) $\log. a \,.\, a^x$, $d.\frac{dy}{dx} = \log. a\, d.\, a^x$

$= \log. a \log. a \,.\, a^x\, dx$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = (\log. a)^2 \,.\, a^x$; $d.\frac{d^2y}{dx^2}$

$= (\log. a)^2\, d.\, a^x = (\log. a)^2 \log. a \,.\, a^x\, dx$, daher

$\frac{d^3y}{dx^3} = (\log. a)^3 a^x$; eben so finden wir

$\frac{d^4y}{dx^4} = (\log. a)^4 a^x$, $\frac{d^5y}{dx^5} = (\log. a)^5 a^x$, u. s. w.

Setzen wir statt fx und statt der Differentialquotienten dieser Funktion ihre Werthe in die allgemeine Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so erhalten wir f(x+c)

$$= a^{x+c} = a^x . a^c = a^x + \log. a . a^x c + (\log. a)^2 a^x \frac{c^2}{1.2}$$

$$+ (\log. a)^3 a^x \frac{c^3}{1.2.3} + (\log. a)^4 a^x \frac{c^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Dividiren wir diese Gleichung durch a^x, und setzen wir sodann statt c die veränderliche Größe z, so ist

$$a^z = 1 + z \log. a + \frac{z^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{z^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \frac{z^4 (\log. a)^4}{1.2.3.4}$$

$+ \ldots .$

Wenn $a = e$ = der Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist $\log. a = \log. e = 1$, daher auch $(\log. e)^2 = 1$, $(\log. e)^3 = 1$, $(\log. e)^4 = 1$ . .; es ist also

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Für $z = 1$ verwandelt sich diese Reihe in $e = 1 + 1$

$$+ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots;$$

wodurch wir den Werth von e durch eine sehr stark konvergirende Reihe ausgedrückt erhalten. Berechnen wir die Summe der zwölf ersten Theilsätze dieser Reihe, so erhalten wir den Werth von e genau bis zu der letzten Dezimalstelle

$e = 2{,}718281828459 \ldots .$

Setzen wir $e^z = u$, so ist $z = \log. u$; die vorige Reihe verwandelt sich also dadurch in

$$u = 1 + \log. u + \frac{(\log. u)^2}{1.2} + \frac{(\log. u)^3}{1.2.3} + \frac{(\log. u)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

§. 33.

Es sey $y = fx = \log. x$, und der Logarithme gehöre einem Systeme an, dessen Modulus $= m$ sey, so ist $y' = f(x+c) = \log.(x+c)$; es ist dann (§. 19.)

$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}$, $d.\frac{dy}{dx} = d.\frac{m}{x} = -\frac{m\,dx}{x^2}$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m}{x^2}$;

eben so $d.\frac{d^2y}{dx^2} = -d.\frac{m}{x^2} = \frac{2m\,dx}{x^3}$, daher $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m}{x^3}$;

eben so $d.\frac{d^3y}{dx^3} = d.\frac{2m}{x^3} = -\frac{2.3m\,dx}{x^4}$, daher

$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{2.3m}{x^4}$; eben so finden wir $\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{2.3.4m}{x^5}$,

$\frac{d^6y}{dx^6} = -\frac{2.3.4.5m}{x^6}$, u. s. w.

Setzen wir jetzt statt $y = \log. x$, und statt der Differentialquotienten dieser Funktion ihre Werthe in die allgemeine Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so ist $\log.(x+c) = \log. x + \frac{mc}{x} - \frac{mc^2}{2x^2} + \frac{2mc^3}{2.3x^3}$

$- \frac{2.3mc^4}{2.3.4x^4} + \frac{2.3.4mc^5}{2.3.4.5x^5} - \ldots\ldots$; es ist also

$\log.(x+c) - \log. x =$

$m\left(\frac{c}{x} - \frac{c^2}{2x^2} + \frac{c^3}{3x^3} - \frac{c^4}{4x^4} + \frac{c^5}{5x^5} - \frac{c^6}{6x^6} + \ldots\right)$; es ist aber $\log.(x+c) - \log. x = \log.\left(\frac{x+c}{x}\right) = \log.\left(1+\frac{c}{x}\right)$, folglich

$\log.\left(1+\frac{c}{x}\right) = m\left(\frac{c}{x} - \frac{c^2}{2x^2} + \frac{c^3}{3x^3} - \frac{c^4}{4x^4} + \frac{c^5}{5x^5} - \ldots\right)$;

setzen wir $\frac{c}{x} = u$, so erhalten wir

$\log.(1+u) = m\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \ldots\right)$.

Für $m = 1$ erhalten wir

$\log. nat.(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \ldots$;

wir erhalten also den Logarithmen einer Zahl in einem andern Logarithmensysteme, indem wir durch den Modulus dieses Systemes den natürlichen Logarithmen der Zahl multipliziren.

Die obige Reihe konvergirt nur für Werthe von u, welche merklich kleiner als 1 sind; wir wollen daher dieselbe unter eine zur Berechnung der Logarithmentafeln geeignetere Gestalt bringen.

Setzen wir also vorerst überall — u statt + u, so erhalten wir

$$\log.(1-u) = m\left(-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}-..\right);$$

ziehen wir diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhalten wir $\log.(1+u) - \log.(1-u) = \log.\frac{1+u}{1-u}$

$$= 2m\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+..\right).$$

Diese Reihe konvergirt etwas mehr, als die vorhergehende; um jedoch eine konvergentere zu erhalten, so setzen wir $\frac{1+u}{1-u} = \frac{r}{n}$, woraus $u = \frac{r-n}{r+n}$ folgt; es ist also

$$\log.\frac{r}{n} = 2m\left[\frac{r-n}{r+n}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{r-n}{r+n}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{r-n}{r+n}\right)^5+..\right];$$

setzen wir jetzt $r = t+n$, so erhalten wir

$$\log.\frac{t+n}{n} = \log.(t+n) - \log. n$$

$$= 2m\left[\frac{t}{2n+t}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^5+..\right];$$

es ist also $\log.(t+n) =$

$$\log. n + 2m\left[\frac{t}{2n+t}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{t}{2n+t}\right)^5+...\right].$$

Berechnen wir darnach den Modulus des Brigg'schen Logarithmensystems.

Setzen wir in der vorigen Reihe vorerst $t = n = 1$, und $m = 1$, so ist, weil $\log. 1 = 0$,

$\log.\text{nat}.2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+...\right] = 0{,}6931472$,

bis zu der Genauigkeit der letzten Dezimalstelle; setzen wir jetzt

$n=4$, $t=1$, $m=1$, so erhalten wir, weil log. $4=2$ log. 2, log. nat. $5=2$ log. nat. $2+2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+..\right]$ $=1{,}6094379$; es ist also log. nat. $10=$ log. nat. $5+$ log. nat. $2=1{,}6094379+0{,}6931472=2{,}3025851$; da nun log. brigg. $10=m$ log. nat. 10, so ist der Modulus des Brigg'schen Logarithmensystems $m=\frac{\text{log. brigg. 10}}{\text{log. nat. 10}}$ $=\frac{1}{2{,}3025851}=0{,}4342945$.

§. 34.

Wir gehen nun zu der Entwickelung der trigonometrischen Funktionen über.

Es sey $y=fx=\sin. x$, so ist $y'=f(x+c)=\sin.(x+c)$; es ist gegenwärtig (§. 24.) $\frac{dy}{dx}=\cos. x$, $d.\frac{dy}{dx}=d\cos. x$ $=-\sin. x\,dx$, daher $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin. x$; $d.\frac{d^2y}{dx^2}=-d\sin. x=-\cos. x\,dx$, daher $\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos. x$; eben so finden wir $\frac{d^4y}{dx^4}=\sin. x$, $\frac{d^5y}{dx^5}=\cos. x$, u. s. w.

Setzen wir jetzt statt $y=\sin. x$, und statt der Differentialquotienten dieser Funktion ihre Werthe in die allgemeine Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so erhalten wir die Reihe: $\sin.(x+c)=\sin. x+c\cos. x-\frac{c^2\sin. x}{2}-\frac{c^3\cos. x}{2.3}+\frac{c^4\sin. x}{2.3.4}+\frac{c^5\cos. x}{2.3.4.5}-....$

Diese Reihe ist richtig für einen jeden Werth von x; setzen wir also $x=0$, so erhalten wir, weil $\sin. 0^0=0$, $\cos. 0^0=1$, $\sin. c=c-\frac{c^3}{1.2.3}+\frac{c^5}{1.2.3.4.5}-...$; setzen wir statt c die veränderliche Größe z, so ist $\sin. z=z-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-....$

Setzen wir dagegen in der obigen Reihe $x =$ einem Quadranten $= \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin.(x+c) = \sin.\left(\frac{\pi}{2}+c\right)$ $= \cos. c$, $\sin. x = 1$, $\cos. x = o$; unsre Reihe verwandelt sich also dadurch in $\cos. c = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4}$ $- \frac{c^6}{1.2.3.4.5.6} + ..$; oder, indem wir $c = z$ setzen,

$$\cos. z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Diese Reihe hätten wir auch leicht aus der direkten Entwickelung von $\cos.(x+c)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze herleiten können.

§. 35.

Die Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze können wir in eine andere verwandeln, vermittelst welcher eine Funktion direkt durch eine Reihe ausgedrückt wird.

Setzen wir nämlich in

$$f(x+c) = fx + \frac{dfx}{dx}c + \frac{d^2fx}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \ldots$$

überall $x = o$, und stellen wir durch fox den Werth vor, welchen fx erhält, indem man $x = o$ setzt; durch $\frac{dfox}{dx}$ den Werth vor, welchen $\frac{dfx}{dx}$ erhält, indem man $x = o$ setzt; durch $\frac{d^2fox}{dx^2}$ den Werth vor, welchen $\frac{d^2fx}{dx^2}$ erhält, indem man $x = o$ setzt, u. s. w., so erhalten wir $fc = fox + \frac{dfox}{dx}c + \frac{d^2fox}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \ldots$; setzen wir $c = x$, so ist

$$fx = fox + \frac{dfox}{dx}x + \frac{d^2fox}{dx^2}\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

Diese Reihe wurde zuerst von Maclaurin auf einem andern Wege aufgefunden; sie wird deßwegen die Maclaurin'sche Reihe genannt.

So sey, z. B., $fx = a^x$ nach dieser Reihe zu entwickeln. Es ist gegenwärtig $f\,o\,x = a^o = 1$, $\frac{df\,x}{dx} = a^x \log. a$, daher $\frac{df\,o\,x}{dx} = \log. a$; $\frac{d^2 f\,x}{dx^2} = a^x (\log. a)^2$, daher $\frac{d^2\,f\,o\,x}{dx^2} = (\log. a)^2$; eben so ist $\frac{d^3\,f\,o\,x}{dx^3} = (\log. a)^3$, u. s. w.; es ist also

$$a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wie wir schon (§. 32.) gefunden haben.

§. 36.

Wenn der Differentialquotient einer Funktion eine gebrochene oder eine irrationale oder auch nur eine etwas zusammengesetzte ganze Funktion von x ist, so erscheinen in der Regel die höhern Differentialquotienten dieser Funktion unter einer noch zusammengesetzteren Gestalt; die Entwickelung der Funktion nach dem Taylor'schen oder Maclaurin'schen Lehrsatze fällt dann beschwerlich aus. In diesem Falle setzt man am besten die Funktion sogleich = einer Reihe nach den ganzen Potenzen von x aufsteigender Theilsätze, deren Coeffizienten im allgemeinen unbestimmt, und sodann nach der Beschaffenheit der Funktion zu bestimmen sind. Wenn man nun diese Gleichung einmal oder mehreremal differentiirt, so wird man endlich zu einer Gleichung gelangen, deren erstes Glied entweder selbst eine ganze Funktion von x ist, oder doch wenigstens leicht durch eine nach ganzen Potenzen von x aufsteigende Reihe ausgedrückt werden kann; da nun die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x in beiden Gliedern der Gleichung gleich seyn müssen, so erhält man dadurch Gleichungen, aus welchen man die Werthe der in der ursprünglich angenommenen Reihe vorkommenden unbestimmten Coeffizienten finden kann.

Der Gang dieses Verfahrens wird uns durch das folgende Beispiel deutlicher werden.

Es sey $y = \text{arc. tg. } x$ durch eine nach den Potenzen der Tangente x aufsteigende Reihe auszudrücken.

Setzen wir also arc. tg. $x = a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots$; so ist vorerst $a = o$; denn für $x = o$ verwandelt sich diese Gleichung in arc. tg. $o = o = a$.

Differentiiren wir diese Gleichung, und dividiren wir sodann durch dx, so ist, weil $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}$

$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots$,

daher, indem wir den Nenner wegschaffen,

$1 = (1+x^2)(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+..)$,

daher, indem wir die angedeutete Multiplikation vollziehen,

$1 = A + 2Bx + (A+3C)x^2 + (2B+4D)x^3 + (3C+5E)x^4 + (4D+6E)x^5 + (5E+7F)x^6 + \ldots$

Aus dieser Gleichung folgt vorerst $A = 1$; da ferner in dem ersten Gliede derselben kein x vorkömmt, d. h., die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von $x = o$ sind, so muß dieses auch in dem zweiten Gliede der Gleichung statt finden; es ist also $2B = o$, daher $B = o$;

$A + 3C = o$, daher

$C = -\frac{A}{3} = -\frac{1}{3}$;

$2B + 4D = o$, daher $D = -\frac{2B}{4} = o$;

$3C + 5E = o$, daher $E = -\frac{3C}{5} = \frac{1}{5}$;

$4D + 6F = o$, daher $F = -\frac{4D}{6} = o$;

$5E + 7G = o$, daher $G = -\frac{5E}{7} = -\frac{1}{7}$; u. s. w.;

substituiren wir diese sämmtlichen Werthe, so erhalten wir

$\text{arc. tg. } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$; das Gesetz des Fortganges dieser Reihe ist augenscheinlich. Setzen wir $x = 1$, und stellen wir, wie bisher, durch π die halbe Peripherie des Kreises vor, dessen Halbmesser $= 1$; es ist dann arc. tg. 1

$= \frac{\pi}{4}$, daher $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$, welches die bekannte Leibnitz'sche Reihe ist; dieselbe konvergirt aber zu wenig, um darnach π berechnen zu können.

Eine konvergentere Reihe erhalten wir, indem wir bemerken, daß tg. 30° = tg. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; setzen wir also $\frac{1}{\sqrt{3}}$ statt x, so erhalten wir $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} - \ldots = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} - \frac{1}{7.3^4} + \frac{1}{9.3^5} - \ldots\right)$

Es sey $y =$ arc. sin. x durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe auszudrücken. Setzen wir arc. sin. x $= a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots$, so ist vorerst $a = o$, weil die Gleichung sich in arc. sin. $o = o = a$ verwandelt, wenn man $x = o$ setzt. Differentiiren wir diese Gleichung, und dividiren wir sodann durch dx, so ist, weil (§. 26.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots$

Es ist im allgemeinen $(1+z)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}z + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}z^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.2.3}z^3 + \ldots$

$= 1 + \frac{1}{n}z + \frac{1-n}{2n^2}z^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3n^3}z^3 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{2.3.4n4}z^4 + \ldots$; setzen wir $n = -2$, $z = -x^2$, so erhalten wir $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2.2^2}x^4 + \frac{3.5}{2.3.2^3}x^6 + \frac{3.5.7}{2.3.4.2^4}x^8 + \ldots$;

substituiren wir diese Entwickelung, so ist $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2.2^2}x^4$
$+\frac{3.5}{2.3.2^3}x^6+\frac{3.5.7}{2.3.4.2^4}x^8+\ldots=A+2Bx$
$+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+6Fx^5+7Gx^6+8Hx^7+\ldots$;
setzen wir auf beiden Seiten die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x gleich, so erhalten wir

$A=1$;
$2B=0$, daher $B=0$;
$3C=\frac{1}{2}$, also $C=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$;
$4D=0$, also $D=0$;
$5E=\frac{3}{2.2^2}$, also $E=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2.2^2}$;
$6F=0$, also $F=0$;
$7G=\frac{3.5}{2.3.2^3}$, also $G=\frac{1}{7}\cdot\frac{3.5}{2.3.2^3}$;
$8H=0$, also $H=0$, u. s. w.; setzen wir diese Werthe, so ist arc. sin. $x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2.2^2}\frac{x^5}{5}+\frac{3.5}{2.3.2^3}\frac{x^7}{7}$
$+\frac{3.5.7}{2.3.4.2^4}\frac{x^9}{9}+\ldots$; das Gesetz des Fortganges dieser Reihe ist augenscheinlich. Setzen wir, z. B., $x=\frac{1}{2}$, so ist arc. sin. $\frac{1}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, daher $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2^4}$
$+\frac{3}{5.2.2^7}+\frac{3.5}{7.2.3.2^{10}}+\frac{3.5.7}{9.2.3.4.2^{13}}+\ldots$,
welche Reihe schnell konvergirt.

§. 37.

Es sey die Entwickelung von $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\eta x^4+\ldots)^n$ zu bestimmen. Setzen wir $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\eta x^4+\ldots)^n=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots$, so erhalten wir $A=\alpha^n$, indem wir $x=0$ setzen. Nehmen wir die Logarithmen von beiden Gliedern der Gleichung, so ist
$n\log.(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\eta x^4+\ldots)$

$= \log.(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = \ldots)$;
differentiiren wir, und dividiren wir sodann durch dx, so ist

$$\frac{n(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\eta x^3 + \ldots)}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \eta x^4 + \ldots} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots};$$

schaffen wir den Nenner weg, so ist
$n(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\eta x^3 + \ldots)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \eta x^4 \ldots)(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots)$; vollziehen wir die angedeuteten Multiplikationen, so ist
$nA\beta + (nB\beta + 2nA\gamma)x + (nC\beta + 2nB\gamma + 3nA\delta)x^2 + (nD\beta + 2nC\gamma + 3nB\delta + 4nA\eta)x^3 + \ldots.$
$= B\alpha + (2C\alpha + B\beta)x + (3D\alpha + 2C\beta + B\gamma)x^2 + (4E\alpha + 3D\beta + 2C\gamma + B\delta)x^3 + \ldots.$

Setzen wir die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich, so ist
$B\alpha = nA\beta$, $2C\alpha + B\beta = nB\beta + 2nA\gamma$,
$3D\alpha + 2C\beta + B\gamma = nC\beta + 2nB\gamma + 3nA\delta$,
$4E\alpha + 3D\beta + 2C\gamma + B\delta = nD\beta + 2nC\gamma + 3nB\delta + 4nA\eta$;
u. s. w., es ist also

$$A = \alpha^n, \quad B = \frac{nA\beta}{\alpha},$$

$$C = \frac{(n-1)B\beta + 2nA\gamma}{2\alpha},$$

$$D = \frac{(n-2)C\beta + (2n-1)B\gamma + 3nA\delta}{3\alpha},$$

$$E = \frac{(n-3)D\beta + (2n-2)C\gamma + (3n-1)B\delta + 4nA\eta}{4\alpha},$$

u. s. w.; das Gesetz der Entstehung der folgenden Coeffizienten aus den vorhergehenden ist augenscheinlich.

Wenn $\beta = 1$, und $\gamma = \delta = \eta = \ldots = 0$, so ist $A = \alpha^n$, $B = \frac{n\alpha^n}{\alpha} = n\alpha^{n-1}$, $C = \frac{(n-1)B}{2\alpha} = \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}$, $D = \frac{(n-2)C}{3\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^{n-3}$,

u. s. w.; wir gelangen also dadurch zu der binomischen Entwickelung $(\alpha+x)^n = \alpha^n + n\,\alpha^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^{n-3}x^3 + \ldots$

Von den größten und kleinsten Werthen einer Funktion einer veränderlichen Größe.

§. 38.

Es sey y eine Funktion der veränderlichen Größe x; wenn wir x einen bestimmten Werth geben, so können wir aus der zwischen x und y bestehenden Gleichung den entsprechenden bestimmten Werth (oder die entsprechenden bestimmten Werthe, wenn die Funktion eine vielförmige ist) von y berechnen. Wenn nun einem bestimmten Werthe $x = \alpha$ ein Werth $y = \beta$ entspricht, und wenn dieser Werth β größer ist sowohl als der Werth von y, welcher $\alpha + \delta$, wie auch als der Werth von y, welcher $\alpha - \delta$ entspricht, welches δ eine Größe, so klein als man nur will, vorstellt, so sagt man $y = \beta$ sey ein Größtes, ein maximum.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, so sey $y = c - (x-a)^2$. Welchen Werth wir auch x geben, so ist y immer $< c$, weil $(x-a)^2$ immer positiv ist, x mag $< a$ oder $> a$ angenommen werden.

Wenn wir jedoch $x = a$ setzen, so ist der entsprechende Werth von $y = c$; dieser Werth ist ein Größtes, denn wenn man $x = a + \delta$ setzt, so ist der Werth von $y = c - (a+\delta-a)^2 = c - \delta^2$, und wenn man $x = a - \delta$ setzt, so ist der Werth von $y = c - (a-\delta-a)^2 = c - \delta^2$; diese beiden Werthe sind also größer, als der Werth $y = c$, welcher $x = a$ entspricht.

Wenn dagegen der Werth $y = \beta$, welcher $x = \alpha$ entspricht, so beschaffen ist, daß er kleiner ist sowohl als der Werth von y, welcher $x = \alpha + \delta$, so wie auch als der Werth von y, welcher $x = \alpha - \delta$ entspricht, wel-

ches δ wieder eine Größe, so klein als man nur will, vorstellt, so sagt man, $y = \beta$ sey ein Kleinstes, ein minimum.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, so sey $y = c + (x - a)^2$. Welchen Werth, verschieden von a, wir auch x geben, so ist immer der entsprechende Werth von $y > c$, indem $(x - a)^2$ positiv ist, x mag $> a$ oder $< a$ angenommen werden; wenn wir aber $x = a$ setzen, so ist $y = c$, und ein Kleinstes; denn für $x = a + \delta$ erhalten wir $y = c + (a + \delta - a)^2 = c + \delta^2$, für $x = a - \delta$ erhalten wir $y = c + (a - \delta - a)^2 = c + \delta^2$; in beiden Fällen ist also der entsprechende Werth von y größer, als der Werth $y = c$, welcher $x = a$ entspricht.

§. 39.

Es sey $y = fx$; sehen wir nun, auf welche Weise wir die maxima und minima dieser Funktion bestimmen.

Es erhalte x den Zuwachs + c; stellen wir den entsprechenden Werth von y durch y′ vor, so ist $y' = f(x + c) = y + \frac{dy}{dx} c + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c^2}{1.2} + \ldots$

Wenn wir dagegen annehmen, daß dieser Zuwachs negativ und $= -c$ ist, so erhalten wir den entsprechenden Werth von y, welchen wir y″ nennen wollen, indem wir in die vorige Entwickelung − c statt + c hinschreiben; es ist also $y'' = f(x - c) = y - \frac{dy}{dx} c + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c^2}{1.2} - \ldots$

folglich

$$y' - y = \frac{dy}{dx} c + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{c^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y'' - y = -\frac{dy}{dx} c + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{c^3}{1.2.3} + \ldots$$

Diesen Zuwachs c können wir so klein annehmen, daß die Theilsätze, welche das Quadrat und die höheren Potenzen von c als Faktoren enthalten, ohne Irrthum neben

dem ersten Theilsatze des zweiten Gliedes weggelassen werden können; es bleibt dann

$$y' - y = \frac{dy}{dx} c, \quad y'' - y = -\frac{dy}{dx} c.$$

Wenn nun y ein Größtes ist, so muß $y > y'$ und $y > y''$; die beiden Differenzen $y' - y$ und $y'' - y$ müssen also dann negativ seyn; wenn y ein Kleinstes ist, so ist zugleich $y < y'$, $y < y''$; die beiden Differenzen $y' - y$ und $y'' - y$ müssen also dann einen negativen Werth haben; dieses kann aber nicht stattfinden, wenn $\frac{dy}{dx}$ nicht $= o$, indem sonst die eine dieser beiden Differenzen positiv ist, wenn die andere negativ ist; die Funktion kann also nur für solche Werthe von x ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, für welche der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = o$.

Wenn nun $\frac{dy}{dx} = o$, so ist

$$y' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y'' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Indem wir wieder c so klein annehmen, daß wir die höheren Potenzen von c gegen die niederen ohne Irrthum weglassen können, so haben wir nur hinzuschreiben:

$$y' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}, \quad y'' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}.$$

Da nun $\frac{c^2}{1.2}$ eine wesentlich positive Größe ist, c mag positiv oder negativ seyn, so ist das Zeichen dieser beiden Differenzen dasselbe, als das Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$. Wenn nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, so ist sowohl $y' - y$ als $y'' - y$ negativ; y ist also dann ein Größtes. Wenn aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv

ist, so sind die Differenzen $y' - y$ und $y'' - y$ gleichfalls positiv; y ist also dann ein Kleinstes.

Um also zu sehen, ob $y = fx$ eines maximi oder minimi fähig ist, so setzen wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = o$; wenn wir aus dieser Gleichung reelle Werthe von x finden, so substituiren wir dieselben in den Ausdruck des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$; wird derselbe dadurch negativ, so ist der entsprechende Werth von y ein maximum der Funktion; wird aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ dadurch positiv, so ist der entsprechende Werth von y ein minimum der Funktion.

Es könnte aber seyn, daß der aus $\frac{dy}{dx} = o$ gezogene Werth von x gleichfalls $\frac{d^2y}{dx^2}$ in Null verwandelte. Indem wir wieder c so klein annehmen, daß wir dessen höhere Potenzen gegen die niederen ohne Irrthum vernachlässigen können, so ist

$$y' - y = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3}, \quad y'' - y = -\frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3}.$$

Da nun diese beiden Differenzen mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, so kann kein maximum oder minimum stattfinden, wenn der aus $\frac{dy}{dx} = o$ gezogene Werth von x nicht auch $\frac{d^3y}{dx^3}$ in Null verwandelt.

Findet dieses aber statt, so ist, indem wir wieder c so klein annehmen, daß wir seine höheren Potenzen gegen die niederen ohne Irrthum vernachlässigen können, $y' - y = \frac{d^4y}{dx^4}\frac{c^4}{1.2.3.4}$, $y'' - y = \frac{d^4y}{dx^4}\frac{c^4}{1.2.3.4}$.

Da nun diese beiden Differenzen mit demselben Zeichen behaftet sind, so zeigen wir wieder nach, daß y ein maxi-

mum ist, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ negativ, daß dagegen y ein minimum ist, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ positiv wird.

Auf dieselbe Weise zeigen wir im allgemeinen nach, daß, wenn wir aus $\frac{dy}{dx} = o$ einen Werth von x ziehen, und denselben in die verschiedenen auf einander folgenden Differentialquotienten setzen, kein maximum oder minimum stattfindet, wenn der Grad des zuerst nicht verschwindenden Differentialquotienten ein ungerader ist; daß aber ein maximum oder minimum stattfindet, wenn der Grad des zuerst nicht verschwindenden Differentialquotienten ein gerader ist; und zwar findet ein maximum statt, wenn der Werth desselben negativ, dagegen ein minimum, wenn der Werth desselben positiv ausfällt.

Anmerkung. Ich setze hier aus der Algebra als bekannt voraus, daß von zwei negativen Größen diejenige die kleinere ist, deren absoluter Werth der größere ist; so, z. B., ist — 8 kleiner als — 5.

§. 40.

Wenden wir dieses Verfahren auf die beiden Beispiele des §. 38. an.

Es sey $y = c - (x - a)^2$, so ist $\frac{dy}{dx} = -2(x - a)$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$; aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $-2(x - a) = o$, also $x = a$, woraus $y = c$ folgt; da nun der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, so ist $y = c$ ein maximum.

Es sey $y = c + (x - a)^2$, so ist $\frac{dy}{dx} = 2(x - a)$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$; aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $2(x - a) = o$, daher $x = a$, welchem Werthe $y = c$ entspricht; da nun

der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ positiv ist, so ist $y = c$ ein minimum der Funktion.

Es sey zu bestimmen, für welche Werthe von x die Funktion $y = x^3 - 12x^2 + 45x + 36$ ein maximum oder minimum ist. Es ist hier

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x^2 - 8x + 15)$,

und $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 24$. Setzen wir jetzt

$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 8x + 15) = 0$, so folgt daraus

$x^2 - 8x + 15 = 0$, $x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$;

es ist also $x = 3$ und $x = 5$.

Substituiren wir vorerst in den zweiten Differentialquotienten $x = 3$, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \cdot 6 - 24 = -6$, also negativ; es ist daher

$y = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 + 36 = 90$ ein maximum der Funktion; setzen wir jetzt in den zweiten Differentialquotienten $x = 5$, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \cdot 5 - 24 = 6$, also positiv; es ist daher

$y = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 + 36 = 86$ ein minimum der Funktion.

Es seyen die maxima und minima der Funktion $y = 3x^4 - 40x^3 + 186x^2 - 360x - 30$ zu bestimmen. Es ist gegenwärtig

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 40x^2 + 2 \cdot 186x - 360$

$= 12(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$, und

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3x^2 - 20x + 31)$. Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, deren drei Wurzeln $x = 2$, $x = 3$ und $x = 5$ sind.

Setzen wir vorerst $x = 2$ in den zweiten Differentialquotienten, so ist

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,(3 \,.\, 2^2 - 20 \,.\, 2 + 31) = 12 \,.\, 3$, also positiv; es ist daher

$y = 3 \,.\, 2^4 - 40 \,.\, 2^3 + 186 \,.\, 2^2 - 360 \,.\, 2 - 30 = + 278$

ein minimum der Funktion.

Setzen wir $x = 3$ in den zweiten Differentialquotienten, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,(3 \,.\, 3^2 - 20 \,.\, 3 + 31) = - 12 \,.\, 2$, also negativ; es ist daher

$y = 3 \,.\, 3^4 - 40 \,.\, 3^3 + 186 \,.\, 3^2 - 360 \,.\, 3 - 30 = - 173$

ein maximum der Funktion.

Setzen wir endlich $x = 5$ in den zweiten Differentialquotienten, so ist

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,(3 \,.\, 5^2 - 20 \,.\, 5 + 31) = 12 \,.\, 6$, also positiv; es ist daher

$y = 3 \,.\, 5^4 - 40 \,.\, 5^3 + 186 \,.\, 5^2 - 360 \,.\, 5 - 30 = - 305$

ein minimum der Funktion.

§. 41.

Es sey a die Summe der Basis und der Höhe eines Rechteckes; wie groß müssen diese beiden Dimensionen seyn, damit der Flächeninhalt desselben ein maximum sey?

Es sey x die eine Seite, so ist die andere $= a - x$, daher der Flächeninhalt des Rechteckes $= x\,(a - x) = ax - x^2$; es ist also $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = - 2$; aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $a - 2x = o$, also $x = \frac{a}{2}$; die andere Seite ist also $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, daher der Flächeninhalt $= \frac{a}{2} \,.\, \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$; da nun der zweite Differentialquotient negativ ist, so ist dieser Flächeninhalt ein maximum.

Unter allen Rechtecken, in welchen die Summe der Seiten dieselbe ist, hat also das Quadrat den größten Flächeninhalt.

§. 42.

Es sey A (Fig. 2.) ein in dem Winkel $EBC = \alpha$ der Lage nach gegebener Punkt; die von diesem Punkte auf die Schenkel des Winkels gefällten Senkrechten seyen $AD = a$, $AF = b$; es ist durch diesen Punkt eine Linie EC dergestalt zu führen, daß der Flächeninhalt des so bestimmten Dreieckes BEC ein minimum sey.

Es sey der Winkel $E = x$, so ist der Winkel $C = 180° - \alpha - x$; nennen wir u den Flächeninhalt des Dreieckes BEC, so ist $u = BDAF + EAD + AFC$;

es ist die Linie $ED = \frac{AD}{tg.\,E} = \frac{a}{tg.\,x}$,

und $FC = \frac{AF}{tg.\,C} = \frac{-b}{tg.\,(\alpha + x)}$; es ist also das Dreieck

$DAE = \frac{AD.DE}{2} = \frac{a^2}{2\,tg.\,x}$, und das Dreieck

$AFC = \frac{AF.FC}{2} = -\frac{b^2}{2\,tg.\,(\alpha + x)}$, daher

$$u = BDAF + \frac{a^2}{2\,tg.\,x} - \frac{b^2}{2\,tg.\,(\alpha + x)}.$$

Nehmen wir den Differentialquotienten von u, und bemerken wir, daß das Differential der beständigen Größe $BDAF = o$, so ist

$$\frac{du}{dx} = -\frac{a^2}{2\cos.\,x^2\,tg.\,x^2} + \frac{b^2}{2\cos.\,(\alpha + x)^2\,tg.\,(a + x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\sin.\,x^2} - \frac{b^2}{\sin.\,(a+x)^2}\right), \text{ weil}$$

$\sin.\,x = \cos.\,x\,tg.\,x$, $\sin.\,(\alpha+x) = \cos.\,(\alpha+x)\,tg.\,(\alpha+x)$;

es ist also $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\cos.\,x}{\sin.\,x^3} - \frac{b^2\cos.\,(\alpha+x)}{\sin.\,(\alpha+x)^3}\right)$.

Aus $\frac{du}{dx} = o$ folgt $\frac{a^2}{\sin.\,x^2} - \frac{b^2}{\sin.\,(a+x)^2} = o$,

$\frac{a^2}{\sin. x^2} = \frac{b^2}{\sin.(\alpha+x)^2}$, $\frac{a}{\sin. x} = \frac{b}{\sin.(\alpha+x)}$; setzen wir statt $\frac{b^2}{\sin.(\alpha+x)^2}$ seinen Werth in den zweiten Differentialquotienten, so ist

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{a^2}{2 \sin. x^2}\left[\frac{\cos. x}{\sin. x} - \frac{\cos.(\alpha+x)}{\sin.(\alpha+x)}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2 \sin. x^2}\left[\frac{\sin.(\alpha+x)\cos. x - \cos.(\alpha+x)\sin. x}{\sin. x \sin.(\alpha+x)}\right]$$

$= \frac{a^2 \sin. \alpha}{2 \sin. x^3 \sin.(\alpha+x)}$, weil

$\sin.(\alpha+x)\cos. x - \cos.(\alpha+x)\sin. x = \sin.(\alpha+x-x) = \sin.\alpha$;

es ist also $\frac{d^2 u}{dx^2}$ positiv, folglich entspricht der Werth $\frac{a}{\sin. x}$

$= \frac{b}{\sin.(\alpha+x)}$ einem minimum der Funktion. Es ist aber

$\frac{a}{\sin. x} = \frac{AD}{\sin. E} = AE$, und $\frac{a}{\sin.(\alpha+x)} = \frac{AF}{\sin. C} = AC$;

es ist also $AC = AE$; wir leisten also der Aufgabe Genüge, wenn der zwischen den Schenkeln des Winkels B begriffene Theil der geraden Linie in A halbirt wird.

Um diese Linie geometrisch zu konstruiren, so führen wir AI parallel mit dem Schenkel BE, nehmen, auf dem Schenkel BC, $IC = BI$, verbinden AC und verlängern diese Linie bis sie den andern Schenkel in E schneidet; es ist dann $BI : IC = AE : AC$; da nun nach Construktion $BI = IC$, so ist auch $AE = AC$.

§. 43.

Es sey der Kreis, dessen Halbmesser $OA = r$ (Fig. 3.) die Basis eines Zylinders; man will denselben zu einem rechtwinkligen Parallelepipedon dergestalt behauen, daß die Tragkraft desselben ein Größtes sey.

Ich setze als bekannt voraus, daß diese Tragkraft in dem zusammengesetzten Verhältnisse des Quadrates der vertikalen Höhe AB und der horizontalen Breite AD der

Basis $ABCD$ des Parallelepipedons steht, also durch $AB^2 . AD$ ausgedrückt wird.

Fällen wir von dem Mittelpunkte O auf AB die Senkrechte $OE = x$, so ist $AD = 2x$, $AE^2 = r^2 - x^2$, $AB^2 = 4AE^2 = 4(r^2 - x^2)$; es ist also die Tragkraft $y = 8x(r^2 - x^2) = 8(r^2 x - x^3)$, folglich $\frac{dy}{dx} = 8(r^2 - 3x^2)$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -2.3.8x$. Aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $r^2 - 3x^2 = o$, $x^2 = \frac{r^2}{3}$, daher $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Setzen wir diesen Werth in den zweiten Differentialquotienten, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2.3.8r}{\sqrt{3}}$, also negativ; der gefundene Werth von x entspricht also dem maximum der Tragkraft. Es ist also die Breite $AD = 2x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, und die Höhe $AB = 2AE = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 44.

Es sey a^3 der Körperinhalt eines zylindrischen Hohlmaßes; wie groß müssen seine Höhe und der Halbmesser seiner Basis seyn, damit sein Umfang, d. h., die Summe seiner konveren Oberfläche und der einen seiner Basen, ein minimum sey?

Es sey x der Halbmesser der Basis, u die Höhe, so ist der Körperinhalt des Zylinders $a^3 = \pi x^2 u$, daher $u = \frac{a^3}{\pi x^2}$; die konvexe Oberfläche

$= 2\pi x u = 2\pi x . \frac{a^3}{\pi x^2} = \frac{2a^3}{x}$, und der Flächeninhalt der Basis $= \pi x^2$; es ist also der Umfang

$y = \pi x^2 + \frac{2a^3}{x}$, daher $\frac{dy}{dx} = 2\pi x - \frac{2a^3}{x^2}$,

und $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\pi + 2.2\frac{a^3}{x^3}$. Aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $\pi x - \frac{a^3}{x^2} = o$, $\pi x = \frac{a^3}{x^2}$, $x^3 = \frac{a^3}{\pi}$, daher $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$; setzen wir diesen Werth in den zweiten Differentialquotienten, so erhalten wir $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\pi + 2.2\pi = 6\pi$, also positiv; der gefundene Werth von x entspricht also einem minimum der Funktion.

Aus $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$ folgt $u = \frac{a^3}{\pi} : \frac{a^2}{\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^2}$

$= \frac{a^3}{\pi} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^2}{a^2} = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}} = x$; damit also der Umfang ein minimum sey, so müssen die Höhe und der Halbmesser der Basis des Zylinders gleich seyn.

§. 45.

In der Hydrodynamik wird bewiesen, daß, wenn man den Stoß einer Flüssigkeit auf eine Ebne, welche mit der Richtung des Stromes einen Winkel $= \alpha$ bildet, nach einer auf den Strom senkrechten Richtung zerlegt, dieser proportional ist mit $\sin.\ \alpha^2 \cos.\ \alpha$; für welchen Werth von α wird dieser Stoß ein größter seyn?

Differentiiren wir die Gleichung $u = \sin.\ \alpha^2 \cos.\ \alpha$, so erhalten wir $\frac{du}{d\alpha} = 2 \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha \cos.\ \alpha - \sin.\ \alpha \sin.\ \alpha$

$= 2 \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha^2 - \sin.^3 \alpha$, und

$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2 \cos.\ \alpha \cos.\ \alpha^2 - 4 \sin.\ \alpha \sin.\ \alpha \cos.\ \alpha - 3 \sin.\ \alpha^2 \cos.\ \alpha$

$= 2 \cos.\ \alpha^3 - 7 \sin.\ \alpha^2 \cos.\ \alpha.$

Aus $\frac{du}{d\alpha} = 0$ folgt $2 \sin. \alpha \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^3 = 0$,
welcher Gleichung wir Genüge leisten 1) durch $\sin. \alpha = 0$,
2) durch $2 \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2 = 0$.

1) Aus $\sin. \alpha = 0$ folgt $\alpha = 0$; es ist also dann die Fläche der Richtung des Stoßes parallel, daher der Stoß $= 0$; es ist dann $\cos. \alpha = 1$, daher $\frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2$, folglich positiv, der Stoß ist also in diesem Falle ein **minimum**.

2) Aus $2 \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2 = 0$ folgt, indem wir $1 - \cos. \alpha^2$ statt $\sin. \alpha^2$ setzen, $2 \cos. \alpha^2 - 1 + \cos. \alpha^2 = 0$, $3 \cos. \alpha^2 = 1$, $\cos. \alpha^2 = \frac{1}{3}$, $\cos. \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$, daher $\sin. \alpha^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, folglich $\sin. \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$; es ist also der Winkel $\alpha = 54°, 44'$; es ist dann ferner $\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -4\sqrt{\frac{1}{3}}$, also negativ; der so eben gefundene Werth von α entspricht also einem **maximum** des Stoßes.

§. 46.

Ein Dreieck **A B C** (Fig. 4.) kann durch unendlich viele zwischen den Seiten **A B** und **A C** geführte gerade Linien in zwei gleiche Theile getheilt werden; es ist unter allen diesen Linien das **minimum** zu bestimmen.

Der Flächeninhalt des Dreieckes $ABC = \frac{AB.AC.\sin. A}{2}$,

und der des Dreieckes $ADE = \frac{AD.AE.\sin. A}{2}$;

da nun $ADE = \frac{1}{2}.ABC$ seyn soll, so ist

$\frac{AD.AE.\sin. A}{2} = \frac{1}{2}.\frac{AB.AC.\sin. A}{2}$, folglich

$AD.AE = \frac{AB.AC}{2}$, daher $AE = \frac{AB.AC}{2.AD}$; es sey nun $AB = c$, $AC = b$, $AD = x$, so ist $AE = \frac{bc}{2x}$.

Es ist $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 . AD . AE . \cos. A$;

es sey nun $DE = y$, so ist $y^2 = x^2 + \frac{b^2 c^2}{4x^2} - bc \cos. A$,

daher $y = \sqrt{x^2 + \frac{b^2 c^2}{4x^2} - bc \cos. A} = \sqrt{u}$,

indem wir, um abzukürzen,

$x^2 + \frac{b^2 c^2}{4x^2} - bc \cos. A = u$ setzen.

Es ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \frac{du}{dx} \cdot u^{-\frac{1}{2}}$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \cdot u^{-\frac{3}{2}}$;

der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ wird $= o$ seyn, wenn wir

$\frac{du}{dx} = 2x - \frac{b^2 c^2}{2x^3} = o$ setzen; hieraus folgt

$x^4 = \frac{b^2 c^2}{4}$, $x^2 = \frac{bc}{2}$, daher $x = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Es ist

$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 + \frac{3 b^2 c^2}{2x^4}$; indem wir jetzt statt x seinen

Werth setzen, so erhalten wir zugleich $\frac{du}{dx} = o$,

$u = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} - bc \cos. A = bc (1 - \cos. A)$

$= 2 bc \sin. \frac{1}{2} A^2$, $\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 + \frac{3 . 4}{2} = 8$; es ist

also $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2 bc \sin. \frac{1}{2} A^2}}$ positiv; der gefundne

Werth von x entspricht also einem minimum von y.

Aus $x = AD = \sqrt{\frac{bc}{2}}$ folgt die andere Seite

$AE = \frac{bc}{2} : \sqrt{\frac{bc}{2}} = \sqrt{\frac{bc}{2}} = AD$; das Dreieck

ADE ist also gleichschenklich. Die Linie

$AD = y = \sqrt{u} = \sqrt{2 bc \sin. \frac{1}{2} A^2} = \sin. \frac{1}{2} A . \sqrt{2bc}$.

§. 47.

Es sey

$y = x^5 - 3ax^4 + 4a^2x^3 - 4a^3x^2 + 3a^4x - a^5$,

und es seyen die maxima und minima dieser Funktion von x zu bestimmen.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 12ax^3 + 12a^2x^2 - 8a^3x + 3a^4$$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 36ax^2 + 24a^2x = 8a^3$.

Aus

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 12ax^3 + 12a^2x^2 - 8a^3x + 3a^4 = o$$

folgen die zwei gleichen Wurzeln $x = a$, und die beiden imaginären Wurzeln $\frac{a \pm a\sqrt{14}}{5}$, welche letztere also nicht weiter zu berücksichtigen sind. Setzen wir jetzt $x = a$ in den zweiten Differentialquotienten, so erhalten wir $\frac{d^2y}{dx^2} = o$; setzen wir also jetzt $x = a$ in den dritten Differentialquotienten $\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 72ax + 24a^2$, so erhalten wir $+ 12a^2$; da nun dieses Resultat nicht $= o$, so entspricht der Werth $x = a$ weder einem maximum noch einem minimum der Funktion. (§. 39.).

Es seyen die maxima oder minima der Funktion von $xy = x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - 4a^3x^2 + a^4x + 3a^5$ zu bestimmen. Es ist gegenwärtig

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 16ax^3 = 18a^2x^2 - 8a^3x + a^4,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 48ax^2 + 36a^2x - 8a^3.$$

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 16ax^3 + 18a^2x^2 - 8a^3x + a^4 = o$$

hat $x = \frac{a}{5}$ einmal, und $x = a$ dreimal zur Wurzel.

1) Setzen wir $x = \frac{a}{5}$ in den zweiten Differentialquotienten, so erhalten wir $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{64}{25}a^3$, also ein negatives Resultat; es entspricht also $x = \frac{a}{5}$ das maximum von $y = \frac{9631}{3125}a^5$.

2) Setzen wir nun $x = a$ in den zweiten Differentialquotienten, so wird derselbe $= o$; setzen wir jetzt $x = a$ in den dritten Differentialquotienten $\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 96ax + 36$, so wird derselbe abermals $= o$; setzen wir also $x = a$ in den vierten Differentialquotienten $\frac{d^4y}{dx^4} = 120x - 96a$, so erhalten wir das positive Resultat $+ 24$; es entspricht also $x = a$ einem **minimum** der Funktion (§. 39.).

§. 48.

Wenn y eine ungesonderte Funktion von x ist, d. h., wenn zwischen x und y eine Gleichung $f(x, y) = o$ gegeben ist, so wird in der Regel auch $\frac{dy}{dx} = o$ eine Gleichung zwischen y und x seyn; zwischen diesen beiden Gleichungen elimininen wir y, und erhalten so eine nur x enthaltende Endegleichung, wir suchen sodann die reellen Werthe von y, welche den hieraus bestimmten reellen Werthen von x entsprechen, und setzen nach und nach ein jedes Paar dieser Werthe in den Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$, um zu sehen, ob dieses Paar einem **maximum** oder **minimum** der Funktion angehört.

Es sey, z. B., $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = o$.
Differentiiren wir diese Gleichung, so ist
$2ydy - 2mxdy - 2mydx + 2xdx = o$, daher

$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}$. Aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt $y = \frac{x}{m}$; setzen wir diesen Werth in die ursprüngliche Gleichung, so ist

$\frac{x^2}{m^2} - \frac{2mx \cdot x}{m} + x^2 - a^2 = o$, $x^2 (1 - m^2) = m^2 a^2$,

$x = \frac{ma}{\sqrt{1 - m^2}}$; folglich $y = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}$, indem wir nur die positiven Werthe berücksichtigen. Um nun zu sehen, ob dieser Werth einem maximum oder minimum von y entspricht, so differentiiren wir die erste Differentialgleichung abermals, und erhalten so

$y d^2 y + dy^2 - m dx dy - mx d^2 y - m dy dx + dx^2 = o$,

und indem wir durch dx^2 dividiren,

$(y - mx \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + 1 = o$; es ist aber $\frac{dy}{dx} = o$; setzen wir ferner statt x und y ihre Werthe, so erhalten wir $\frac{a(1 - m^2)}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 = o$, daher

$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\sqrt{1 - m^2}}{a}$, der zweite Differentialquotient ist also negativ; das obige Paar Werthe von x und y gehört also einem maximum der Funktion y an.

Von den Bruchfunktionen, welche sich für bestimmte Werthe von x in $\frac{0}{0}$ verwandeln, und von der Betrachtung der Fälle, in welchen die Taylor'sche Reihe nicht mehr anwendbar ist.

§. 49.

Es sey y durch eine Gleichung von der Gestalt $y = \frac{fx}{\varphi x}$ gegeben, so berechnen wir daraus aus einem jeden gegebnen Werthe von x den entsprechenden Werth von y.

Wenn nun für einen Werth von $x = a$ sowohl $fa = o$ als $\varphi a = o$ wird, so ist der entsprechende Werth von $y = \frac{0}{0}$. Da nun diese Gleichung gleichbedeutend ist mit $y \cdot o = o$, welcher ein jeder Werth von y Genüge leistet, weil das Produkt eines jeden Faktors durch $o = o$, so bleibt in dieser Gleichung y vollkommen unbestimmt.

Es sey, z. B., aus der Gleichung $y = \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$ der Werth von y zu bestimmen, welcher $x = a$ entspricht. Substituiren wir diesen Werth, so erhalten wir

$y = \frac{a^3 - a^3}{a^2 - a^2} = \frac{0}{0}$, also den entsprechenden Werth von y unbestimmt. Da nun aber

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$, und

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, so läßt sich die ursprüngliche Gleichung auch so anschreiben:

$y = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{(x - a)(x + a)}$; unterdrücken wir den dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktor $x - a$, so ist

$y = \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$; wenn also $x = a$, so entspricht diesem Werthe von x der bestimmte Werth von

$y = \frac{a^2 + a^2 + a^2}{a + a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$.

Indem wir also gegenwärtig $x = a$ in den ursprünglichen Zähler und Nenner setzen, so wurden beide nur deßwegen $= o$, weil ein jeder derselben den sich bei dieser Substitution in Null verwandelnden Faktor $x - a$ enthielt; ehe wir aber diese Substitution vornahmen, war es uns verstattet, diesen dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktor zu unterdrücken; indem wir jetzt $x = a$ setzen, so erhalten wir für y den bestimmten Werth $\frac{3a}{2}$.

Aus dem vorigen Beispiele erkennen wir, daß, wenn für einen Werth von x der Zähler und Nenner von $y = \frac{fx}{\varphi x}$

sich in Null verwandeln, und so der entsprechende Werth von y unter einer unbestimmten Gestalt erscheint, diese Unbestimmtheit auch nur eine scheinbare seyn kann.

§. 50.

Es sey wieder $y = \frac{fx}{\varphi x}$; sehen wir nun, auf welche Weise wir, wenn es möglich ist, den entsprechenden bestimmten Werth von y in dem Falle finden, wo der Zähler und der Nenner dieses Bruches sich für einen bestimmten Werth von $x = a$ in o verwandeln.

Angenommen, daß x den Zuwachs c erhalte, so verwandelt sich $y = \frac{fx}{\varphi x}$ in

$$\frac{f(x+c)}{\varphi(x+c)} = \frac{fx + \frac{dfx}{dx}c + \frac{d^2fx}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \ldots}{\varphi x + \frac{d\varphi x}{dx}c + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \ldots}$$

Wenn wir $c = o$ setzen, so verwandelt sich diese Entwickelung wieder in $\frac{fx}{\varphi x} = c$. Setzen wir nun überall a statt x; stellen wir durch $f'a$ und $\varphi'a$ die bestimmten Werthe vor, welche dadurch die ersten Differentialquotienten $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d\varphi x}{dx}$ erhalten; stellen wir eben so durch $f''a$ und $\varphi''a$ die bestimmten Werthe vor, welche dadurch die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2fx}{dx^2}$ und $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ erhalten; stellen wir im allgemeinen analog die Werthe vor, welche dadurch die höhern Differentialquotienten erhalten, so ist die Entwickelung von

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{fa + c.f'a + \frac{c^2}{1.2}.f''a + \frac{c^3}{1.2.3}.f'''a + \ldots}{\varphi a + c\varphi'a + \frac{c^2}{1.2}\varphi''a + \frac{c^3}{1.2.3}\varphi'''a + \ldots}$$

Wenn nun $fa = o$, $\varphi a = o$, so ist

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{cf'a + \frac{c^2}{1.2}.f''a + \ldots}{c\varphi'a + \frac{c^2}{1.2}\varphi''a + \ldots} = \frac{f'a + \frac{c}{2}f''a + \ldots}{\varphi'a + \frac{c}{2}\varphi''a + \ldots}.$$

Setzen wir nun $c = o$, so erhalten wir den Werth von $y = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{f'a}{\varphi'a}$. Wenn also ein Werth von $x = a$ den Zähler und den Nenner des Werthes von y in Null verwandelt, so erhalten wir den bestimmten Werth von y, indem wir sowohl in den Differentialquotienten des Zählers, als auch in den des Nenners $x = a$ setzen, und sodann jenen durch diesen dividiren.

Es kann aber der Fall eintreten, daß $x = a$ gleichfalls $f'a$ und $\varphi'a$ in Null verwandelt; es ist dann

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{\frac{c}{2}.f''a + \frac{c^2}{2.3}f'''a + \ldots}{\frac{c}{2}.\varphi''a + \frac{c^2}{2.3}\varphi'''a + \ldots} = \frac{f''a + \frac{c}{3}f'''a + \ldots}{\varphi''a + \frac{c}{3}\varphi'''a + \ldots};$$

setzen wir nun wieder $c = o$, so erhalten wir den Werth von $y = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{f''a}{\varphi''a}$. Wenn also ursprünglich sowohl der Zähler fx, als auch der Nenner, und sodann der erste Differentialquotient sowohl des Zählers, als auch des Nenners sich für $x = a$ in Null verwandeln, so erhalten wir den entsprechenden bestimmten Werth von y, indem wir in den zweiten Differentialquotienten des Zählers und des Nenners $x = a$ setzen, und sodann jenen durch diesen dividiren.

Eben so beweisen wir, daß, wenn $x = a$ auch den zweiten Differentialquotienten sowohl des Zählers, als auch des Nenners in Null verwandelt, wir den entsprechenden bestimmten Werth von y erhalten, indem wir $x = a$ in den dritten Differentialquotienten des Zählers und des Nenners setzen, und sodann jenen durch diesen dividiren; und eben so wird es sich verhalten, wenn auch der dritte Differentialquotient

sowohl des Zählers, als auch des Nenners sich für $x = a$ in Null verwandelt.

§. 51.

Wenden wir dieses Verfahren auf einige Beispiele an.

Es sey $y = \frac{x^n - 1}{x - 1} =$ der Summe der n Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 1$, und deren Quotient $= x$. Wenn dieser Quotient $x = 1$, so ist $y = \frac{1^n - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$, erscheint also unter der unbestimmten Gestalt; es ist aber leicht einzusehen, daß nun ein jedes dieser n Glieder $= 1$, daher die Summe dieser Glieder $= n$ seyn muß; und dieses finden wir auch durch unser Verfahren, indem gegenwärtig $fx = x^n - 1$, $\varphi x = x - 1$, daher $\frac{df x}{dx} = n x^{n-1}$, $\frac{d\varphi x}{dx} = 1$, $a = 1$, daher

$$y = \frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{n}{1} = n.$$

Im allgemeinen wird der Werth von

$$y = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \text{ für } x = a,\ y = \frac{a^m - a^m}{a^n - a^n} = \frac{0}{0},$$

erscheint also unter einer unbestimmten Gestalt.

Um nun den bestimmten entsprechenden Werth von y zu finden, so setzen wir $x = a$ in $\frac{df x}{dx} = m x^{m-1}$, und $\frac{d\varphi x}{dx} = n x^{n-1}$, und erhalten so $y = \frac{m a^{m-1}}{n a^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$.

Es sey der Werth von $y = \frac{x^4 - 4a^3 x + 3a^4}{x^4 - ax^3 - a^3 x + a^4}$ für $x = a$ zu bestimmen. Es ist dieses

$$y = \frac{a^4 - 4a^4 + 3a^4}{a^4 - a^4 - a^4 + a^4} = \frac{4a^4 - 4a^4}{2a^4 - 2a^4} = \frac{0}{0}.$$

Um nun den entsprechenden bestimmten Werth von y zu finden, so nehmen wir den Differentialquotienten des Zählers

$\frac{dfx}{dx} = 4x^3 - 4a^3$, und den Differentialquotienten des Nenners $\frac{d\varphi x}{dx} = 4x^3 - 3ax^2 - a^3$, und erhalten so für

$x = a$, $y = \frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{4a^3 - 4a^3}{4a^3 - 3a^3 - a^3} = \frac{0}{0}$. Wir nehmen also jetzt den zweiten Differentialquotienten des Zählers $\frac{d^2fx}{dx^2} = 12x^2$, und den des Nenners $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = 12x^2 - 6ax$, und erhalten so für $x = a$ den entsprechenden bestimmten Werth von

$$y = \frac{f''a}{\varphi''a} = \frac{12a^2}{12a^2 - 6a^2} = 2.$$

Es sey $y = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$, so ist für $x = 0$, $y = \frac{a - a}{0} = \frac{0}{0}$, erscheint also unter einer unbestimmten Gestalt.

Um nun den bestimmten Werth von y zu finden, so setzen wir $x = 0$ in $\frac{dfx}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, und $\frac{d\varphi x}{dx} = 2x$; wir erhalten dadurch $y = \frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{0}{0}$. Es ist ferner

$\frac{d^2fx}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$, und $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = 2$;

für $x = 0$ erhalten wir also $y = \frac{f''a}{\varphi''a} = \frac{1}{2a}$.

§. 52.

Wenden wir noch dieses Verfahren auf einige Fälle an, bei welchen in dem Zähler oder in dem Nenner, oder in beiden zugleich, transzendente Funktionen von x vorkommen.

Es sey

$y = \frac{a^x - b^x}{x}$, so ist für $x = 0$, $y = \frac{a^0 - b^0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$.

Es ist gegenwärtig $\frac{dfx}{dx} = a^x \log. a - b^x \log. b$, und $\frac{d\varphi x}{dx} = 1$; der $x = o$ entsprechende bestimmte Werth von y ist also $\frac{a^o \log. a - b^o \log. b}{1} = \log. a - \log. b.$

Es verwandelt sich $y = \frac{1 - \sin. x + \cos. x}{\sin. x + \cos. x - 1}$ in $y = \frac{0}{0}$, wenn $x = 90°$; es ist gegenwärtig

$\frac{dfx}{dx} = -\cos. x - \sin. x$, $\frac{d\varphi x}{dx} = \cos. x - \sin. x$;

der bestimmte Werth von y, welcher $x = 90°$ entspricht, ist also $= \frac{-\cos. 90° - \sin. 90°}{\cos. 90° - \sin. 90°} = \frac{-1}{-1} = +1.$

Es verwandelt sich

$y = \frac{a - x - a \log. a + a \log. x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$ in $\frac{0}{0}$ für $x = a$;

es ist gegenwärtig

$\frac{dfx}{dx} = -1 + \frac{a}{x}$, $\frac{d\varphi x}{dx} = -\frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$,

für $x = a$ erhalten wir also

$y = \left(-1 + \frac{a}{a}\right) : \frac{a - a}{\sqrt{2a^2 - a^2}} = \frac{0}{0}.$

Es ist ferner

$\frac{d^2fx}{dx^2} = -\frac{a}{x^2}$; $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{(a - x)^2}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$;

der bestimmte Werth von y, welcher $x = a$ entspricht, ist also

$-\frac{a}{a^2} : \left[\frac{1}{\sqrt{2a^2 - a^2}} + \frac{(a - a)^2}{\sqrt{(2a^2 - a^2)^3}}\right] = -\frac{a}{a^2} : \frac{1}{a} = -1.$

Es verwandelt sich $y = \frac{x^x - x}{1 - x + \log. x}$ in $\frac{0}{0}$ für $x = 1$;

es ist gegenwärtig

$\frac{dfx}{dx} = x^x (\log. x + 1) - 1$, $\frac{d\varphi x}{dx} = -1 + \frac{1}{x}$;

es ist also für $x = 1$, $y = \frac{\log. 1 + 1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$.

Es ist ferner

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = \frac{x^x}{x} + x^x(\log.x+1)^2, \text{ und } \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2};$$

wir erhalten also für $x = 1$ den bestimmten Werth von

$$y = \frac{1 + (1 + \log. 1)^2}{-1} = -2.$$

Es verwandelt sich $y = \frac{\log. x}{x-1}$ für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$; es ist gegenwärtig $\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d\varphi x}{dx} = 1$, es ist also der bestimmte Werth von y, welcher $x = 1$ entspricht, $y = \frac{1}{1} = 1$.

§. 53.

Aus dem Bisherigen geht schon hinlänglich die Wichtigkeit des Taylor'schen Lehrsatzes hervor.

Es kommen jedoch auch Fälle vor, in welchen derselbe zur Entwickelung einer Funktion nach einer Reihe nicht mehr anwendbar ist.

Es komme in der Funktion $y = fx$ ein Ausdruck vor, in welchem $(x-a)^{\frac{r}{s}}$ Faktor sey, welches $\frac{r}{s}$ ein ächter und positiver Bruch sey. Es wird dann $(x-a)^{\frac{r}{s}-1}$ in $\frac{dy}{dx}$ (§. 29.), $(x-a)^{\frac{r}{s}-2}$ in $\frac{d^2 y}{dx^2}$, und im allgemeinen $(x-a)^{\frac{r}{s}-n} = (x-a^{\frac{r-ns}{s}} = 1:(x-a)^{\frac{ns-r}{s}}$ in $\frac{d^n y}{dx^n}$ vorkommen.

So lange $\frac{r}{s} > n$, so wird für $x = a$, $(x-a)^{\frac{r}{s}-n}$ sich in Null verwandeln; wenn aber $\frac{r}{s} < n$, so ist $\frac{ns-r}{s}$ positiv, es ist also dann für $x = a$,

$$(x-a)^{\frac{r}{s}-n} = 1:(x-a)^{\frac{ns-r}{s}} = 1:0^{\frac{ns-r}{s}} = \frac{1}{0},$$

also unendlich groß. In den höhern Differentialquotienten

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} \text{ u. s. w.}$$

wird $(x-a)^{\frac{r}{s}-n-1} = 1 : (x-a)^{\frac{s(n+1)-r}{s}}$,

$(x-a)^{\frac{r}{s}-n-2} = 1 : (x-a)^{\frac{s(n+2)-r}{s}}$,

u. s. w., vorkommen; diese sämmtlichen höhern Differentialquotienten werden also gleichfalls unendlich groß. Wenn $(x-a)^{\frac{r}{s}}$ in einer Funktion von x vorkömmt, so werden sämmtliche Differentialquotienten dieser Funktion von demjenigen an, dessen Ordnung größer ist, als $\frac{r}{s}$, für $x = a$ unendlich groß werden.

Wenn wir also diese Funktion nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln, indem wir annehmen, daß x sich in $x+c$ verwandelt, und so

$$fx \text{ in } f(x+c) = fx + \frac{dfx}{dx} \cdot c + \frac{d^2 fx}{dx^2} \frac{c^2}{1.2} + \ldots$$

übergeht, und wenn wir sodann diese Entwickelung für den Fall, in welchem $x = a$, anwenden wollen, so werden in derselben alle Theilsätze, in welchen die Ordnung des Differentialquotienten $\frac{r}{s}$ übersteigt, unendlich groß werden; für $x = a$ geht aber $(x-a)^{\frac{r}{s}}$, indem x den Zuwachs c erhält, in $(a+c-a)^{\frac{r}{s}} = c^{\frac{r}{s}}$ über, wird also nicht unendlich groß; es wird also $f(a+c)$ auch nicht unendlich groß; die Entwickelung von $f(x+c)$ kann also gegenwärtig für $x = a$ nicht nach dem Taylor'schen Lehrsatze vorgenommen werden, obschon für alle übrige Werthe von x die Entwickelung gelten wird.

§. 54.

Die Entwickelung für einen bestimmten Werth $x = a$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist also nicht mehr an-

wendbar, wenn für diesen Werth eine Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{r}{s}}$ $= \sqrt[s]{(x-a)^r}$ verschwindet; suchen wir nun die Ursache davon. Um nun diese zu bestimmen, so müssen wir auf den Grundsatz, aus welchem wir den Taylor'schen Lehrsatz hergeleitet haben, zurückkommen.

Wir haben (§. 7) gesehen, daß

$$f(x+c) = fx + Pc + Qc^2 + Rc^3 + \ldots,$$

und daß in dieser Entwickelung keine gebrochenen Exponenten von c vorkommen können. Dieser Satz ist immer richtig, so lange x nur einen allgemeinen, unbestimmten Werth hat, indem dann $f(x+c)$ auf dieselbe Weise nach $x+c$, als fx nach x zusammengesetzt ist.

Wenn aber in fx eine Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{r}{s}}$ vorkömmt, und wenn die Entwickelung von $f(x+c)$ für den bestimmten Werth von $x = a$ gesucht wird, so verwandelt sich in fx diese Wurzelgröße $(a-a)^{\frac{r}{s}}$ in Null, dagegen in $f(x+c)$ bleibt sie stehen, weil $(a+c-a)^{\frac{r}{s}} = c^{\frac{r}{s}}$; da nun $c^{\frac{r}{s}}$ s verschiedene Werthe hat, und da $c^{\frac{r}{s}}$ in fx für den Werth $x = a$ verschwunden ist, so muß $f(a+c)$ auch s mal so viel Werthe, als fa haben; da nun ferner, indem wir $x = a$ in die Coeffizienten P, Q, R, S, u. s. w., setzen, keine neue Wurzelgröße entstehen kann, so muß, damit das zweite Glied der Gleichung eben so viele Werthe habe, als das erste, in diesem zweiten Gliede auch $c^{\frac{r}{s}}$ vorkommen. In diesem Falle können also die Exponenten von c in der Entwickelung

$$f(a+c) = fa + Pc^{\alpha} + Qc^{\beta} + \ldots$$

nicht alle ganze Zahlen seyn.

Die Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre von den krummen Linien wird mehr Licht über die bisherigen Betrachtungen verbreiten.

§. 55.

Der Taylor'sche Lehrsatz kann also nicht mehr zu Hülfe genommen werden für einen bestimmten Werth $x = a$, welcher einen Ausdruck unterhalb eines Wurzelzeichens in Null verwandelt.

Es sey zu bestimmen, ob eine Funktion $y = fx$ für $x = a$ ein maximum oder minimum ist, welcher Werth eine Größe unterhalb eines Wurzelzeichens in Null verwandle.

Um dieses zu bestimmen, so setzen wir $x = a + c$, und verwandeln vermittelst des binomischen oder polynomischen Lehrsatzes $f(a + c)$ in eine nach den Potenzen von c aufsteigende Reihe

$$f(a + c) = fa + Ac^{\alpha} + Bc^{\beta} + Cc^{\gamma} + \ldots,$$

welche Coeffizienten A, B, C, u. s. w., Funktionen von a und andern gegebenen Größen seyn werden.

Es ist dann gleichfalls

$$f(a - c) = fa + A(-c)^{\alpha} + B(-c)^{\beta} + \ldots$$

Wenn wir nun c kleiner annehmen, als eine jede gegebene Größe, so können wir in der vorigen Entwickelung die Theilsätze, welche höhere Potenzen von c enthalten, vernachlässigen; es bleibt also nur

$$f(a + c) - fa = Ac^{\alpha},$$

$$f(a - c) - fa = A(-c)^{\alpha}.$$

Damit nun ein maximum oder minimum stattfinde, so muß Ac^{α} dasselbe Zeichen, als $A(-c)^{\alpha}$ haben; dieses findet aber nur dann statt, wenn α entweder eine ganze gerade Zahl ist, oder ein unter die einfachste Benennung zurückgebrachter Bruch, dessen Zähler eine gerade Zahl ist. Findet dieses statt, so ist fa ein maximum, wenn A negativ, dagegen ein minimum, wenn a positiv ist. Der Beweis davon ist derselbe, wie in (§. 39).

Es sey, z. B., zu bestimmen, ob $y = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$ für $x = a$ ein maximum oder ein minimum ist.

Für $x = a$ ist vorerst $y = b$; setzen wir jetzt $x = a + c$, so ist, wenn y' den entsprechenden Werth der Funktion vorstellt, $y' = b + c^{\frac{2}{3}} = b + \sqrt[3]{c^2}$; da nun dieser Werth sich nicht ändert, wenn man $-c$ statt $+c$ setzt, und da $y' > b$, so ist der Werth $y = b$, welcher $x = a$ entspricht, ein minimum der Funktion.

§. 56.

Es verwandle $x = a$ den Zähler und den Nenner des Bruches $y = \frac{fx}{\varphi x}$ in Null; es komme aber gegenwärtig $x - a$ als Faktor unterhalb eines Wurzelzeichens vor, das Verfahren des (§. 50) sey also nicht mehr anwendbar; sehen wir nun auf welche Weise wir gegenwärtig, wenn es möglich ist, den bestimmten Werth von $y = \frac{fa}{\varphi a}$ finden.

Es verwandle sich x in $x + c$; entwickeln wir vermittelst des binomischen oder polynomischen Lehrsatzes $f(x+c)$ nach den aufsteigenden Potenzen von c; angenommen, daß

$$f(x+c) = fx + Pc^{\alpha} + Qc^{\beta} + Rc^{\gamma} + \ldots,$$

$$\varphi(x+c) = \varphi x + P'c^{\alpha'} + Q'c^{\beta'} + R'c^{\gamma'} + \ldots;$$

setzen wir jetzt $x = o$, so ist, weil nach Annahme $fa = o$ und $\varphi a = o$,

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{Pc^{\alpha} + Qc^{\beta} + Rc^{\gamma} + \ldots}{P'c^{\alpha'} + Q'c^{\beta'} + R'c^{\gamma'} + \ldots};$$

es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $\alpha > \alpha'$, so erhalten wir, indem wir den Zähler und den Nenner durch $c^{\alpha'}$ dividiren

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{Pc^{\alpha-\alpha'} + Qc^{\beta-\alpha'} + \ldots}{P' + Q'c^{\beta'-\alpha'} + \ldots};$$

setzen wir jetzt $c = o$, so erhalten wir den bestimmten Werth von $y = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{o}{P'} = o$.

2) Wenn $\alpha = \alpha'$, so erhalten wir, indem wir den Zähler und den Nenner durch c^{α} dividiren,

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{P + Q\,c^{\beta-\alpha} + \ldots.}{P' + Q'c^{\beta'-\alpha} + \ldots.};$$

setzen wir jetzt $c = o$, so erhalten wir den bestimmten Werth von $y = \frac{P}{P'}$.

3) Wenn $\alpha' > \alpha$, so erhalten wir, indem wir den Zähler und den Nenner durch c^{α} dividiren,

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{P + Q\,c^{\beta-\alpha} + \ldots.}{P'\,c^{\alpha'-\alpha} + Q'c^{\beta'-\alpha} + \ldots.};$$

setzen wir jetzt $c = o$, so ist $y = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{P}{o}$; der Werth von y, welcher $x = a$ entspricht, ist also gegenwärtig unendlich groß.

Es sey, z. B., der Werth von $y = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x-a}}$ für $x = a$ zu bestimmen. Da für diesen Werth der Zähler und der Nenner sich in Null verwandeln, so setzen wir $a + c$ statt x, und erhalten so

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{\sqrt{(a+c)^2 - a^2}}{\sqrt{a+c-a}} = \frac{\sqrt{2ac+c^2}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{2a+c}\,\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$$

$= \sqrt{2a+c}$; setzen wir jetzt $c = o$, so erhalten wir den bestimmten Werth von $y = \frac{fa}{\varphi a} = \sqrt{2a}$.

Es sey im allgemeinen der Werth von

$y = (x^m - a^m)^{\frac{r}{s}} : (x^n - a^n)^{\frac{r}{s}}$ für $x = o$ zu bestimmen. Setzen wir $a + c$ statt x, so ist $\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)}$

$$= \left[m a^{m-1} c + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 + \ldots\right]^{\frac{r}{s}}$$

$$: \left[n a^{n-1} c + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} c^2 + \ldots\right]^{\frac{r}{s}}$$

$$= \left[\left(m a^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c + \ldots\right)^{\frac{r}{s}} \cdot c^{\frac{r}{s}}\right]$$

$$: \left[\left(n a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} c + \ldots\right)^{\frac{r}{s}} \cdot c^{\frac{r}{s}}\right]$$

$$= \left[m a^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c + \ldots\right]^{\frac{r}{s}}$$

$$: \left[n a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} c + \ldots\right]^{\frac{r}{s}};$$

setzen wir jetzt $c = o$, so erhalten wir den bestimmten Werth

$$\text{von } y = \frac{fa}{\varphi a} = \left(\frac{m a^{m-1}}{n a^{n-1}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\frac{m}{n} a^{m-n}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

In manchen Fällen ist es sogar bequemer, den Werth von Funktionen dieser Art, welcher auch nach (§. 50.) bestimmt werden könnte, nach dem gegenwärtigen Verfahren aufzusuchen.

Es sey, z. B.,

$$y = \frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - x^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}},$$

welcher Bruch sich für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ verwandelt.

Setzen wir $x = a + c$, so verwandelt sich der Bruch nach den gehörigen Reduktionen in

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \frac{2a^3 + 2a^2c - ac^2 + c^3 - 2a^2\sqrt{a^2 + 2ac}}{-2a^2 + c^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2}};$$

es ist aber

$$\sqrt{a^2 + 2ac} = a + c - \frac{c^2}{2a} + \frac{c^3}{2a^2} - \frac{5c^4}{8a^3} + \ldots,$$

$$\sqrt{a^2 - c^2} = a - \frac{c^2}{2a} - \frac{c^4}{8a^3} - \ldots;$$

setzen wir diese Werthe, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen

$$\frac{f(a+c)}{\varphi(a+c)} = \left(\frac{5c^4}{4a} - ..\right) : \left(-\frac{c^4}{4a^2} - ...\right) = \frac{5a - ...}{-1 - ...};$$

setzen wir jetzt $c = o$, so erhalten wir den wahren Werth von

$$y = \frac{fa}{\varphi a} = -5a.$$

Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre von den krummen Linien mit einfacher Krümmung.

§. 57.

Ich setze aus der analytischen Geometrie als bekannt voraus, daß eine jede Gleichung zwischen x und y, bezogen auf ein geradlinigtes Coordinatensystem zweier Coordinatenaxen X und Y, den Lauf einer krummen Linie mit einfacher Krümmung vorstellt. Die gerade Linie, welche als die Einheit des Linearmaßes angenommen wird, wird als gegeben vorausgesetzt; wenn man nun der Abszisse x einen bestimmten Werth a giebt, welcher Werth ausdrückt, wieviel Einheiten des angenommenen Linearmaßes a enthält, so können wir aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung die entsprechenden bestimmten Werthe der Ordinate y berechnen, d. h., wir können darnach bestimmen, welche Punkte der krummen Linie einer jeden Abszisse entsprechen.

Die Differentialrechnung bietet zur Untersuchung der Besonderheiten des Laufes einer krummen Linie vorzügliche Hülfsmittel dar; und da diese Untersuchungen zugleich viel Licht über das Wesen der Differentialrechnung verbreiten, so wollen wir die dahin gehörigen Betrachtungen hier kurz zusammen fassen.

Wir nehmen in der Folge immer an, daß der Winkel der Coordinatenaxen, auf welche die Gleichung der krummen Linie bezogen ist, ein rechter sey.

§. 58.

Es seyen (Fig. 5.) $x = OA$ und $y = AB$ die Coordinaten des Punktes B einer krummen Linie BD; $x' = OC$ und $y' = CD$ seyen die Coordinaten eines andern Punktes D derselben krummen Linie, so ist y eine durch die Gleichung der krummen Linie gegebene Funktion von x. Es sey die Differenz $OC - OA = x' - x = c$, daher $x' = x + c$; da nun y sich in y' verwandelt, indem x den Zuwachs c erhält, so ist y' nach dem Taylor'schen Lehrsatze ausgedrückt durch die Entwickelung:

$$y' = y + \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots,$$

in welcher Entwickelung statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w., ihre aus der Differentiation der Gleichung der krummen Linie hergeleiteten Werthe zu setzen sind. Wenn also die Coordinaten des Punktes B gegeben sind, so bestimmen wir durch diese Gleichung die Ordinate y' des Punktes D der krummen Linie, dessen Abszisse die vorhergehende um c übertrifft; und hieraus erhellet im allgemeinen das Gesetz des Fortganges von einem Punkte der krummen Linie zu einem andern.

Es ist also

$$y' - y = \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \ldots,$$

$$(1)\ldots y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{(x'-x)^2}{1.2} + \ldots.$$

Eine beliebig durch B geführte gerade Linie wird zur Gleichung haben $y'' - y = A(x'' - x)$; x und y sind, wie bisher, die Coordinaten des Punktes B, und A ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Axe X bildet. Für einen Punkt dieser geraden Linie, dessen Abszisse $= x' = AC$, ist $y'' - y = A(x' - x)$; ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (1) ab, so ist

$$y'' - y' = \left(A - \frac{dy}{dx}\right)(x' - x) - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(x'-x)^2}{1.2} - \ldots.$$

Wenn wir annehmen, daß der Punkt D unendlich nahe bei B liege, so verschwinden in dem zweiten Gliede dieser Gleichung die höhern Potenzen von $x' - x$ gegen die erste; die Differenz der Ordinate y'' der geraden Linie und y' der krummen Linie, welche der nämlichen Abszisse x' entsprechen, ist also dann so klein als möglich, wenn $A - \frac{dy}{dx} = o$, d. h., wenn $\frac{dy}{dx} = A$; unter allen geraden Linien, welche durch B geführt werden können, fällt also diejenige am nächsten bei B mit der krummen Linie zusammen, deren Gleichung ist $y'' - y = \frac{dy}{dx}(x'' - x)$; es ist also dieses die Gleichung der durch B der krummen Linie geführten Tangente.

Die Gleichung der durch B der krummen Linie geführten Normale ist also (s. meine analytische Geometrie, S. 52) $y''' - y = -\frac{dx}{dy}(x''' - x)$, wenn x''' und y''' die Coordinaten des allgemeinen Punktes der Normale vorstellen.

§. 59.

Es ist in der Gleichung der Tangente der Coefffzient von $x'' - x$, $\frac{dy}{dx} =$ der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Axe X bildet; die verlängerte Tangente schneide die Axe in T (Fig. 5.), so ist darnach $\text{tg. B T A} = \frac{dy}{dx}$.

Die Subtangente A T, d. h., den Theil der Axe X, welcher begriffen ist zwischen ihrem Durchschnittspunkte mit der Tangente und dem Fuße der Ordinate, bestimmen wir durch die Proportion

$$\text{tg. BTA} : 1 = \text{BA} : \text{AT} = \frac{\text{BA}}{\text{tg. BTA}} = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Es ist die Tangente **BT**, d. h., der zwischen dem Berührungspunkte und der Axe **X** begriffene Theil der Tangente

$$= \sqrt{BA^2 + AT^2} = \sqrt{y^2 + \dot{y}^2 \cdot \frac{dx^2}{dy^2}}$$

$$= y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Die Subnormale **AN**, d. h., den Theil der Axe **X**, welcher begriffen ist zwischen ihrem Durchschnittspunkte mit der Normalen und dem Fuße der Ordinate, bestimmen wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke **TBN**, in welchem

$$AB^2 = AT \cdot AN;$$

es ist also $AN = \frac{BA^2}{AT} = y^2 : \left(y \frac{dx}{dy}\right) = \frac{y\,dy}{dx}$.

Die Normale **BN**, d. h., der zwischen dem Berührungspunkte und der Axe **X** begriffene Theil der Normale

$$= \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{y^2 + y^2 \cdot \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$= y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Beispiele. Die parametrische Gleichung der Kegelschnitte ist (siehe meine analytische Geometrie, Seite 142) $y^2 + nx^2 - 2px = o$, oder, was dasselbe ist, $y^2 = 2px - nx^2$; und zwar gehört diese Gleichung der Ellipse, wenn $n > o$, der Parabel, wenn $n = o$, der Hyperbel, wenn $n < o$.

Durch die Differentiation dieser Gleichung erhalten wir $2y\,dy = 2p\,dx - 2nx\,dx$, daher $\frac{dy}{dx} = \frac{p - nx}{y}$; es ist also die Subtangente $y \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{p - nx} = \frac{2px - nx^2}{p - nx}$,

die Subnormale $y \frac{dy}{dx} = \frac{y(p - nx)}{y} = p - nx$,

die Tangente

$$y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = y \sqrt{1 + \frac{y^2}{(p - nx)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{p^2 + (1-n)(2px - nx^2)}}{p - nx},$$

und endlich die Normale

$$y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = y\sqrt{1 + \frac{(p-nx)^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{y^2 + (p-nx)^2} = \sqrt{p^2 + (1-n)(2px - nx^2)}.$$

Für die Parabel insbesondere ist also, weil in deren Gleichung $n = o$, die Subtangente $= \frac{2px}{p} = 2x =$ der doppelten Abszisse, und die Subnormale $= p =$ dem halben Parameter.

Da es weiter keine Schwierigkeit hat, nach dem Vorhergehenden die Subtangente und die Subnormale einer beliebigen algebraischen oder transzendenten krummen Linie, deren Gleichung gegeben ist, zu bestimmen, so wollen wir uns hierbei nicht länger aufhalten; ich verweise in dieser Hinsicht auf meine analytische Geometrie, in welcher die Subtangenten und die Subnormalen der bemerkungswerthesten krummen Linien auf einem andern Wege bestimmt sind.

§. 60.

In dem vorigen §. haben wir gesehen, daß $\frac{dy}{dx} =$ der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente der krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x und y sind, mit der Axe X bildet. Wenn die Tangente in diesem Punkte der Axe X parallel ist, so ist dieser Winkel $= o$, daher auch seine Tangente $\frac{dy}{dx} = o$.

Um also zu untersuchen, ob in einem Punkte einer krummen Linie die Tangente der Axe X parallel ist, so setzen wir den aus der Gleichung der krummen Linie gezogenen Differentialquotienten $= o$; indem wir sodann die auf diese Weise erhaltene Gleichung mit der Gleichung der krummen Linie verbinden, so bestimmen wir durch Elimi-

nation die Coordinaten der Punkte, in welchen diese Eigenschaft stattfindet.

Aus §. 39. folgt, daß die Ordinate in diesem Punkte ein maximum seyn wird, wenn man ein negatives Resultat erhält, indem man die Werthe von x und y in $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituirt; daß dagegen die Ordinate ein minimum seyn wird, wenn man durch die Substitution der Werthe von x und y in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein positives Resultat erhält. In dem folgenden §. werden wir den Fall betrachten, wenn diese Werthe von x und y in $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituirt, ein Resultat $= o$ zum Vorschein bringen.

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente in einem Punkte einer krummen Linie, dessen Coordinaten x und y sind, mit der Axe Y bildet, ist die Cotangente des Winkels, welchen jene Linie mit der Axe X bildet; sie ist also $= 1 : \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy}$, also = dem Differentialquotienten von x, indem wir x als eine Funktion von y betrachten, welches uns immer verstattet ist. Wenn die Tangente in diesem Punkte der Axe Y parallel ist, so ist der Winkel dieser beiden Linien, daher auch seine Tangente $\frac{dx}{dy} = o$.

Um also zu bestimmen, in welchem Punkte einer krummen Linie die Tangente der Axe Y parallel ist, so setzen wir den aus ihrer Gleichung gezogenen Differentialquotienten $\frac{dx}{dy} = o$; indem wir diese Gleichung mit der Gleichung der krummen Linie verbinden, so erhalten wir durch Elimination die Coordinaten der Punkte, in welchen diese Eigenschaft stattfindet.

Wenn das Resultat der Substitution des Werthes der Coordinaten in den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x}{dy^2}$ positiv ist, so ist in dem entsprechenden Punkte die Abszisse x ein **minimum**; wenn aber das Resultat dieser Substitution negativ ist, so ist die Abszisse ein **maximum**.

In dem nächsten §. werden wir den Fall betrachten, wenn das Resultat dieser Substitution $= o$.

Beispiel. Es ist $x^4 - 2a^2x^2 + a^2y^2 = 8a^4$ die Gleichung einer krummen Linie von der vierten Ordnung. Differentiiren wir dieselbe, so ist

$$4x^3\,dx - 4a^2\,x\,dx + 2a^2\,y\,dy = o,$$
$$(2x^3 - 2a^2x)\,dx + a^2\,y\,dy = o;$$

um nun zu sehen, ob ein maximum oder minimum der Ordinate stattfindet, so setzen wir $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(a^2 - x^2)}{y} = o$, woraus $2x(a^2 - x^2) = o$, also die drei Werthe von x, $x = o$, $x = +a$ und $x = -a$ folgen; setzen wir $x = o$ in die Gleichung der krummen Linie, so erhalten wir $a^2y^2 = 8a^4$, $y^2 = 8a^2$, also zwei entsprechende Werthe von y, $y = +2a\sqrt{2}$ und $y = -2a\sqrt{2}$; setzen wir $x = +a$, so erhalten wir $a^2y^2 = 9a^4$, $y^2 = 9a^2$, also die beiden entsprechenden Werthe von y, $y = +3a$ und $y = -3a$; setzen wir $x = -a$, so erhalten wir abermals $a^2y^2 = 9a^4$, $y^2 = 9a^2$, also die beiden entsprechenden Werthe von y, $y = +3a$, $y = -3a$.

Differentiiren wir die erste Differentialgleichung abermals, indem wir dx als unveränderlich betrachten, so ist $(6x^2 - 2a^2)\,dx^2 + a^2\,dy^2 + a^2\,y\,d^2y = o$; da nun für das **maximum** oder **minimum** der Ordinate $\frac{dy}{dx} = o$, so erhalten wir, indem wir durch dx^2 dividiren,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2 - 6x^2}{a^2\,y}.$$

Für $x = o$ und $y = +2a\sqrt{2}$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{1}{a\sqrt{2}}$; die Ordinate in diesem Punkte A (Fig. 6.) ist also ein minimum.

Für $x = o$ und $y = -2a\sqrt{2}$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$; die Ordinate in diesem Punkte B ist also ein maximum. Für $x = +a$ und $y = +3a$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3a}$; in dem entsprechenden Punkte C ist also die Ordinate ein maximum.

Für $x = +a$ und $y = -3a$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{4}{3a}$; in dem entsprechenden Punkte D ist also die Ordinate ein minimum.

Für $x = -a$ und $y = +3a$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3a}$; in dem entsprechenden Punkte F ist also die Ordinate ein maximum.

Für $x = -a$ und $y = -3a$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{4}{3a}$; in dem entsprechenden Punkte G ist also die Ordinate ein minimum.

Um nun zu sehen, ob ein maximum oder minimum der Abszisse stattfindet, so setzen wir $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x(a^2 - x^2)} = o$, woraus $y = o$ folgt; setzen wir diesen Werth in die Gleichung der krummen Linie, so ist

$x^4 - 2a^2x^2 = 8a^4$, $x^2 = a^2 \pm 3a^2$, also $x^2 = 4a^2$ und $x^2 = -2a^2$; $y = o$ entsprechen also die beiden reellen Werthe $x = +2a$ und $x = -2a$, und die beiden imaginären Werthe $x = +a\sqrt{-2}$, $x = -a\sqrt{-2}$, welche beide letztere weiter nicht zu beachten sind.

Differentiiren wir die erste Differentialgleichung abermals, indem wir dy als unveränderlich betrachten, so erhalten wir

$(2x^3 - 2a^2x)d^2x + (6x^2 - 2a^2)dx^2 + a^2dy^2 = o$;

da nun für das maximum oder minimum der Abszisse $\frac{dx}{dy} = o$, so ist, indem wir durch dy^2 dividiren,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{a^2}{2a^2x - 2x^3}.$$

Für $y = o$ und $x = 2a$ ist $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{12a}$; in dem entsprechenden Punkte K ist also die Abszisse ein maximum; für $y = o$ und $x = -2a$ ist $\frac{d^2x}{dy^2} = +\frac{1}{12a}$; in dem entsprechenden Punkte H ist also die Abszisse ein minimum.

Anmerkung. Wenn der Werth von $\frac{dy}{dx}$ unter einer Bruchgestalt $\frac{m}{n}$ erscheint, so haben wir, um zu sehen, ob ein maximum oder minimum der Ordinate stattfindet, den Zähler $m = o$ zu setzen. Es kann jedoch der Fall seyn, daß die bestimmten Werthe von x und y, welche wir hieraus ziehen, auch n in Null verwandeln, also $\frac{dy}{dx}$ dafür unter der Gestalt erscheint $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

In diesem Falle differentiiren wir die Gleichung $n\,dy = m\,dx$ abermals, und erhalten so $n\,d^2y + dn\,dy = dm\,dx$; angenommen, daß $dn = t\,dx + u\,dy$, $dm = s\,dx + r\,dy$, und bemerken wir, daß in dem vorliegenden Punkte $n = o$, so ist

$$(t\,dx + u\,dy)\,dy = (s\,dx + r\,dy)\,dx, \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{r-t}{u}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{s}{u}.$$

Da nun $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die in diesem Punkte der Curve geführte Tangente mit der Axe X bildet, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn die aus dieser Gleichung gezogenen beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ reell sind, so bestimmen dieselben die Lage zweier Tangenten, welche man in diesem Punkte der krummen Linie führen kann; der Punkt ist also ein doppelter, d. h., es gehen durch denselben zwei Äste der krummen Linie.

2) Wenn diese beiden Werthe imaginär sind, so ist der Punkt ein von der krummen Linie gesondert liegender konjugirter Punkt derselben. (S. meine analytische Geometrie, Seite 222).

Wenn also $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}$, so erkennen wir, ob die krumme Linie einen doppelten Punkt hat, indem wir $m = o$ und $n = o$ setzen; wenn wir aus diesen beiden Gleichungen bestimmte Werthe von x und y erhalten, welche der Gleichung der krummen Linie Genüge leisten, so setzen wir diese Werthe in die zweite Differentialgleichung, wodurch wir eine Gleichung von dem zweiten Grade in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ erhalten; sind nun deren Wurzeln reell, so ist dieser Punkt ein doppelter; sind aber diese Wurzeln imaginär, so ist der Punkt ein konjugirter.

Es kann jedoch der Fall seyn, daß diese Werthe auch u, $r - t$ und s in Null verwandeln, aus der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung also nichts zu schließen ist. In diesem Falle setzen wir die Werthe von x und y in die dritte Differentialgleichung, welche dadurch in eine Gleichung von dem dritten Grade in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ verwandelt wird, deren Untersuchung auf denselben Grundsätzen beruht.

Beispiel. Es sey die krumme Linie, deren Gleichung ist $x^3 + y^3 = 3a(y^2 - 4xy + 3x^2)$; aus dieser Gleichung folgt

$dy(y^2 + 4ax - 2ay) = dx(6ax - 4ay - x^2)$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6a^2x - 4ay - x^2}{y^2 + 4ax - 2ay}.$$

Es verwandelt sich dieser Werth in $\frac{0}{0}$, wenn wir $x = 0$ und $y = 0$ setzen; differentiiren wir also die erste Differentialgleichung abermals, so ist

$d^2y(y^2 + 4ax - 2ay) + dy(2y\,dy + 4a\,dx - 2a\,dy) = dx(6a\,dx - 4a\,dy - 2x\,dx)$, welche Gleichung sich für $x = 0$ und $y = 0$ verwandelt in

$$4a\,dx\,dy - 2a\,dy^2 = 6a\,dx^2 - 4a\,dx\,dy,$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} = -3$, aus welcher Gleichung die beiden Werthe $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dx} = 3$ folgen; der Ursprung der Coordinaten ist also ein doppelter Punkt der krummen Linie, und die in diesem Punkte den beiden Ästen derselben geführten Tangenten bilden mit der Axe der X Winkel, deren trigonometrische Tangenten 3 und 1 sind.

§. 61.

Es seyen (Fig. 7. und 8.) $x = OB$ und $y = AB$ die Coordinaten des Punktes A einer krummen Linie, deren Gleichung gegeben ist; es sey $BC = c$, und D der Punkt der krummen Linie, dessen Abszisse $OC = x + c$, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze die Ordinate dieses Punktes

$$DC = y + \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Fällen wir von A auf DC die Senkrechte $AF = c$; es sey AE die Tangente in A, und E der Punkt, in welchem sie DC schneidet, so ist tg. $EAF = \frac{dy}{dx}$, daher

$$EF = AF \text{ tg. } EAF = \frac{dy}{dx}c;$$ es ist also $EC = AB + EF$

$$= y + \frac{dy}{dx}c;$$ setzen wir dieses in den Werth von DC,

so erhalten wir $DC = EC + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots$

folglich $DC - EC = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots$

Für die Punkte der krummen Linie, welche unendlich wenig von A entfernt sind, ist c eine verschwindend kleine Größe; wir können also in dem Werthe der vorigen Differenz die durch höhere Potenzen von c multiplizirten Theilsätze vernachlässigen, und erhalten so $DC - EC = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}$.

Wenn y positiv ist, so sind auch EC und DC positiv; da nun in dem zweiten Gliede nur das Quadrat von c vorkömmt, so ist das Zeichen dieser Differenz dasselbe, als das Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$, d. h., wenn $BC' = -c$, und wenn $C'D'$ und $C'E'$ die Ordinaten der Curve und der Tangente sind, welche der Abszisse $OC' = x - c$ entsprechen, so ist eben so $D'C' - E'C' = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}$. Wenn nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so ist $DC > EC$, und $D'C' > E'C'$. (Fig. 8.); es liegt also dann D weiter als E, und D′ weiter als E′ von der Axe X entfernt; die krumme Linie ist also dann bei dem Punkte A konver gegen die Axe hin. Wenn aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, so ist $DC < EC$ und $D'C' < E'C'$ (Fig. 7.); es liegt also dann der Punkt D näher als E, und D′ näher als E′ bei der Axe X, die krumme Linie ist also dann konkav bei A gegen die Axe hin.

Es sey jetzt y, also auch EC, $E'C'$, DC und $D'C'$ negativ. Wenn nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so ist $DC > EC$, $D'C' > E'C'$; der absolute Werth von DC ist also dann kleiner, als der von EC, und der absolute Werth von $D'C'$ kleiner als der von $E'C'$; die krumme Linie ist also

dann konkav gegen die Axe hin. Wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, so ist $DC < EC$, und $D'C' < E'C'$; der absolute Werth von DC ist also dann größer, als der von EC, und der absolute Werth von $D'C'$ größer als der von $E'C'$; die krumme Linie ist also dann konvex gegen die Axe X hin.

Die krumme Linie ist also im allgemeinen konvex gegen die Axe X hin bei einem Punkte, für welchen y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit demselben Zeichen behaftet sind; sie ist dagegen konkav gegen die Axe X hin bei einem Punkte, für welchen y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind. Eben so zeigen wir nach, daß die krumme Linie konvex gegen die Axe Y ist bei einem Punkte, für welchen x und $\frac{d^2x}{dy^2}$ mit denselben Zeichen behaftet sind; daß sie dagegen konkav gegen die Axe Y ist bei einem Punkte, für welchen x und $\frac{d^2x}{dy^2}$ mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind.

Es kann jedoch der Fall seyn, daß durch die Substitution der Werthe der Coordinaten eines Punktes $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $\frac{d^2x}{dy^2}$ sich in Null verwandelt; da die Betrachtung dieser beiden Fälle dieselbe ist, so wollen wir annehmen, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ sich in Null verwandle. Unter der Voraussetzung wieder, daß c verschwindend klein ist, wir also die höhern Potenzen von c vernachlässigen können, ist $DC - EC = \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3}$, und $D'C' - E'C' = -\frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3}$, weil $BC' = -c$, und $(-c)^3 = -c^3$. Wenn $\frac{d^3y}{dx^3}$ positiv ist, so ist $DC > EC$, und $D'C' < E'C'$; wenn $\frac{d^3y}{dx^3}$ negativ ist,

so ist $DC < EC$, und $D'C' > E'C'$; in beiden Fällen ist also die krumme Linie auf der einen Seite konkav, auf der andern konvex gegen die Axe X hin; einen Punkt A (Fig. 9.), in welchem dieses stattfindet, nennt man einen Wendungspunkt.

Um also zu sehen, ob eine krumme Linie einen Wendungspunkt hat, so setzen wir vorerst $\frac{d^2y}{dx^2} = o$; wenn wir durch die Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der krummen Linie reelle Werthe für x und y finden, so sind dieses die Coordinaten der gesuchten Wendungspunkte; wir setzen sodann $\frac{d^2x}{dy^2} = o$, und verfahren auf dieselbe Weise.

Das Bisherige gilt nur in der Voraussetzung, daß diese Werthe $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht in Null verwandeln; die Untersuchung des Falles, wenn dieses stattfindet, hat nun weiter keine Schwierigkeit.

Beispiel. Es sey $y = \frac{x^3 - 3ax^2 + 10a^2x - 6a^3}{a^2}$ die Gleichung einer krummen Linie, so ist das Differential dieser Gleichung $dy = \frac{(3x^2 - 6ax + 10a^2)dx}{a^2}$, und das zweite Differential, indem wir dx als unveränderlich betrachten, $d^2y = \frac{(6x - 6a)dx^2}{a^2}$; es ist also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x - 6a}{a^2}$; setzen wir $\frac{d^2y}{dx^2} = o$, so ist $6x - 6a = o$, $x = a$; setzen wir diesen Werth in die Gleichung der krummen Linie, so erhalten wir den entsprechenden Werth von

$$y = \frac{a^3 - 3a^3 + 10a^3 - 6a^3}{a^2} = 2a;$$

da nun dieser Paar Werthe $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{a^2}$ nicht in Null ver-

wandelt, so ist der Punkt, dessen Coordinaten $x = a$ und $y = 2a$ sind, ein Wendungspunkt der krummen Linie.

§. 62.

Es sey $AB = s$ ein Bogen einer krummen Linie (Fig. 10.), die Ordinate $BF = y$, und die Abszisse $OF = x$. Es sey C ein sehr nahe bei B liegender Punkt, dessen Abszisse die vorhergehende um $FG = c$ übertrifft; fällen wir von B auf CG die Senkrechte $BD = c$; die in B der krummen Linie geführte Tangente schneide CG in I.

Es ist $CG = y + \frac{dy}{dx} c + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c^2}{1,2} + \ldots$; daher

$$CG - y = CD = c\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{c}{1,2} + \ldots\right)$$

$$= c\left(\frac{dy}{dx} + Pc\right),$$

indem wir größerer Kürze halber $\frac{d^2y}{2dx^2} + \ldots = P$ setzen;

es ist ferner $ID = BD \text{ tg. } IBD = \frac{dy}{dx} c.$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke IBD folgt

$$IB = \sqrt{ID^2 + BD^2} = \sqrt{c^2 + \frac{dy^2}{dx^2} c^2}$$

$$= c\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

aus dem rechtwinkligen Dreiecke CBD folgt die Sehne

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{c^2 + c^2\left(\frac{dy}{dx} + Pc\right)^2}$$

$$= c\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} + Pc\right)^2};$$

es ist also

$$BI : BC = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} : \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} + Pc\right)^2}.$$

Wenn nun der Punkt C unendlich nahe bei B liegt, so ist c kleiner als eine jede gegebene Größe, Pc kann also dann ohne Irrthum neben $\frac{dy}{dx}$ vernachlässigt werden; das Verhältniß von BI : BC ist also dann unendlich wenig von dem Verhältnisse 1 : 1, d. h., von dem Verhältnisse der Gleichheit verschieden.

Da wir nun aber gerade wie in (§. 23.) beweisen, daß der Bogen BC > als die Sehne BC und < BI, so können wir ohne Irrthum diesen Bogen

$$= BI = c\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

setzen; wenn also FG = c = dx, so ist BC = dem Differentialen des Bogens

$$s = ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{dy^2+dx^2}.$$

Ergänzen wir auf FG = 2 und FB das Rechteck BDGF, und eben so auf FG und CG das Rechteck ECGF, so ist das zwischen FG, den Ordinaten BF und CG und dem Bogen BC begriffene Segment CBFG > BDGF und < ECGF.

Es ist das Rechteck BDGF = BF . FG = y c, und das Rechteck

$$ECGF = FG.CG = c\left(y+\frac{dy}{dx}c+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}+..\right);$$

es ist also $BDGF:ECGF = y:y+\frac{dy}{dx}c+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2}+....$

Wenn nun c verschwindend klein ist, so können wir c und die höheren Potenzen von c neben y vernachlässigen; das Verhältniß der beiden Rechtecke ist also dann unendlich wenig von dem Verhältnisse von 1 : 1, d. h., von dem Verhältnisse der Gleichheit verschieden; um so viel mehr können wir also BCGF = BDGF = y c setzen.

Wenn also FG = c = dx, so ist CBFG = dem Differentialen des Segmentes AHFB = y dx.

§. 63.

Wir haben (§. 58.) gesehen, daß die Tangente in einem Punkte einer krummen Linie unter allen geraden Linien, welche man durch diesen Punkt führen kann, diejenige ist, welche in dieser Stelle am innigsten mit der krummen Linie zusammenfällt.

Sehen wir nun, auf welche Weise wir eine krumme Linie so bestimmen, daß sie unter allen krummen Linien von derselben Art am meisten mit einer gegebenen bei einem gegebenen den beiden krummen Linien gemeinschaftlichen Punkte zusammenfällt.

Es sey im allgemeinen $f(x, y) = o$ die Gleichung der gegebenen krummen Linie **M A N** (Fig. **11.**), und $F(u, v) = o$ die allgemeine Gleichung der krummen Linien von einer gegebenen Art; die krumme Linie, welche der angegebenen Bedingniß Genüge leistet, sey durch **P A Q** vorgestellt; es sey **A** der Punkt, welchen diese beiden krummen Linien gemeinschaftlich haben, so ist für diesen Punkt die Ordinate $AC = y = v$, und die Abszisse $OC = x = u$. Es sey $CD = c$; es seyen $y' = BD$ und $v' = FD$ die Ordinaten der krummen Linien, welche der gemeinschaftlichen Abszisse $OD = x + c = u + c$ entsprechen, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$y' = y + \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$v' = v + \frac{dv}{du}c + \frac{d^2v}{du^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3v}{du^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Subtrahiren wir die zweite Gleichung von der ersten, so ist, weil $y = v$, und $y' - v' = BF$,

$$BF = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dv}{du}\right)c + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2v}{du^2}\right)\frac{c^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3v}{du^3}\right)\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Angenommen, daß **c** verschwindend klein ist. Wenn nun die Gleichung der krummen Linie **P A Q** so beschaffen

ist, daß die Coordinaten des Punktes A der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ Genüge leisten, d. h., wenn die beiden krummen Linien in A eine gemeinschaftliche Tangente haben, so ist, indem wir die mit den höhern Potenzen von c multiplizirten Theilsätze vernachlässigen, die Differenz der beiden Ordinaten $FB = \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2v}{du^2}\right)\frac{c^2}{1.2}$, also verschwindend klein von der zweiten Ordnung; PAQ steht also dann mit MAN bei A in einer innigeren Berührung, als alle anderen krummen Linien von derselben Art, für welche $\frac{dv}{du}$ nicht $= \frac{dy}{dx}$; denn für diese ist die Differenz der beiden der nämlichen Abszisse $OD = x + c$ entsprechenden Ordinaten nur ein verschwindend Kleines von der ersten Ordnung.

Wenn aber außer $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ noch $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2v}{du^2}$, so ist, indem wir wieder die mit den höhern Potenzen von o multiplizirten Theilsätze vernachlässigen, die Differenz der beiden Ordinaten $BF = \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3v}{du^3}\right)\frac{c^3}{1.2.3}$, also verschwindend klein von der dritten Ordnung; die krumme Linie PAQ steht also jetzt mit MAN bei A in einer innigeren Berührung als alle krumme Linien, deren Gleichungen nicht der Bedingniß $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2v}{du^2}$ Genüge leisten, indem man die Werthe der Coordinaten des Punktes A substituirt, weil für diese die Differenz BF der beiden Ordinaten nicht ein verschwindend Kleines von der dritten Ordnung ist.

Auf dieselbe Weise zeigen wir nach, daß, wenn die n ersten aus den Gleichungen der krummen Linien MAN und PAQ gezogenen Differentialquotienten der Ordinaten gleich sind, indem man in dieselben die Coordinaten des Punktes A setzt, die Differenz BF der beiden Ordinaten unendlich

mal kleiner ist, als sie seyn würde, wenn nur die $n - 1$ ersten Differentialquotienten gleich wären.

Wenn also nur $u = x$ und $y = v$, so schneiden sich die beiden krummen Linien in einem Punkte A.

Wenn außerdem noch $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$, so haben die beiden krummen Linien eine gemeinschaftliche Tangente in A, und es findet eine Berührung von der ersten Ordnung in A statt.

Wenn außerdem noch $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2v}{du^2}$, so findet in A eine Berührung von der zweiten Ordnung statt.

Wenn im allgemeinen $y = v$, $x = u$, und die aus den Gleichungen der beiden krummen Linien gezogenen n ersten Differentialquotienten der Ordinaten gleich sind, so findet in dem Punkte, welchen die beiden krummen Linien gemeinschaftlich haben, eine Berührung von der nten Ordnung statt.

Wenn also $f(x, y) = o$ die Gleichung einer gegebenen krummen Linie, und $F(u, v) = o$ die allgemeine Gleichung einer krummen Linie von einer bestimmten Art ist, welche mit der gegebenen einen Berührungspunkt von der nten Ordnung gemeinschaftlich haben soll, so muß vorerst in diesem Punkte $x = u$ und $y = v$ seyn; es muß also die Gleichung stattfinden $F(x, y) = o$; außerdem müssen die aus den beiden Gleichungen $f(x, y) = o$, $F(x, y) = o$ gezogenen n ersten Differentialquotienten der Ordinaten gleich seyn. Wenn also in der Gleichung $F(x, y) = o$, m beständige Größen α, β, γ ..... vorkommen, welches m jedoch $=$ oder $> n + 1$ seyn muß, und wenn wir $m - n - 1$ dieser Größen als gegeben betrachten, so bestimmen wir vermittelst der n Gleichungen, welche die Gleichheit der n ersten Differentialquotienten ausdrücken, und der Gleichung $F(x, y) = o$ diese $n + 1$ übrigen beständigen Größen durch Funktionen von x, y, und der in der gegebenen Gleichung $f(x, y) = o$ vor-

kommenden beständigen Größen; wenn wir sodann diese Werthe in die Gleichung $F(u, v) = o$ substituiren, so gehört sie einer krummen Linie an, welche mit der gegebenen einen Berührungspunkt von der n ten Ordnung gemeinschaftlich hat.

Das Bisherige wird uns durch das folgende Beispiel deutlicher werden.

§. 64.

Es sey (Fig. 12.) MAN eine krumme Linie, deren Gleichung gegeben ist; die allgemeine Gleichung des Kreises ist $(u - \alpha)^2 + (v - \beta)^2 = \varrho^2$, in welcher Gleichung α und β die Coordinaten des Mittelpunktes, und ϱ den Halbmesser des Kreises vorstellen. Damit vorerst der Kreis einen Punkt A mit der krummen Linie gemeinschaftlich habe, so muß in diesem Punkte das $u = x$ und $v = y$ seyn, also $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2 \ldots\ldots (1)$. Damit ferner in diesem Punkte zwischen dem Kreise und der krummen Linie eine Berührung von der ersten Ordnung stattfinde, so muß der aus dieser Gleichung gezogene Differentialquotient derselbe als der aus der Gleichung der krummen Linie gezogene seyn; differentiiren wir also jene, so ist

$$2(x - \alpha)\,dx + 2(y - \beta)\,dy = o,$$

$$y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x - \alpha) \ldots\ldots (2).$$

Wenn wir jetzt die Coordinaten x und y des Punktes A als gegeben ansehen, so haben wir zur Bestimmung der drei Größen α, β und ϱ nur die Gleichungen 1 und 2; wir können also unendlich viele Kreise führen, welche die krumme Linie in einem Punkte A berühren. Die Gleichung 2 läßt sich auch so anschreiben: $\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x)$; sie stimmt daher mit der Gleichung der Normale überein, wenn α und β die Coordinaten des allgemeinen Punktes derselben vorstellen (§. 58.); die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen also auf der durch A der krummen Linie ge-

führten Normale. Unter allen diesen Kreisen gibt es jedoch nur einen einzigen, für welchen A ein Berührungspunkt von der zweiten Ordnung ist, und welcher daher bei A mit der krummen Linie in einem innigeren Zusammenhange als alle übrige berührende Kreise steht; man nennt ihn deßwegen den Krümmungskreis, und seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser.

Der aus der Gleichung dieses Kreises hergeleitete zweite Differentialquotient muß mit dem aus der Gleichung der krummen Linie hergeleiteten übereinstimmen; differentiiren wir also die Gleichung $(y - \beta)\,dy + (x - \alpha)\,dx = o$ abermals, so ist $(y - \beta)\,d^2y + dy^2 + dx^2 = o$ .... (3); es ist also $y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$; setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so ist

$$-\frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{d^2y} + (x - \alpha)\,dx = o,$$ es ist also

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y};$$ setzen wir diese beiden Werthe in die Gleichung (1), so ist

$$\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right)^2 + \frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right)^2 = \varrho^2;$$

bringen wir zu einerlei Benennung, so ist

$$\frac{dx^2\,(dx^2 + dy^2)^2 + dy^2\,(dx^2 + dy^2)^2}{(dx\,d^2y)^2}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)^3}{(dx\,d^2y)^2} = \varrho^2;$$

es ist also der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \pm\,\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

Sehen wir nun, welches dieser beiden Zeichen wir hier anzunehmen haben, indem offenbar der Krümmungshalbmesser nur einen Werth haben kann. Dieses hängt von der willkührlichen Übereinkunft ab, nach welcher Richtung der Normale hin man den Krümmungshalbmesser als positiv

annehmen will. Nun ist man übereingekommen, den Krümmungshalbmesser als positiv anzunehmen, wenn er gegen die Axe X hin fällt, d. h., wenn die krumme Linie konkav gegen diese Axe hin ist; in diesem Falle ist aber der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, daher auch von d^2y negativ (§. 60.), weil dx^2 immer positiv ist; wir haben also den absoluten Werth des Krümmungshalbmessers mit dem Zeichen — zu behaften, damit $-d^2y$ positiv sey; es ist also

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}.$$

Wenn die krumme Linie konvex gegen die Axe X hin ist, so ist d^2y positiv, daher der Krümmungshalbmesser negativ.

Den Werth von ϱ können wir auch so anschreiben, indem wir den Zähler und den Nenner durch dx^3 dividiren:

$$\varrho = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Beispiel. Aus der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte $y^2 = 2px - nx^2$ folgt $y\,dy = p\,dx - n\,x\,dx$,

$$\text{also } dy = \frac{(p-nx)\,dx}{y},\quad dy^2 = \frac{(p-nx)^2\,dx^2}{y^2}$$

$$= \frac{(p^2 - 2nx + n^2x^2)\,dx^2}{y^2} = \frac{(p^2 - ny^2)\,dx^2}{y^2};$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 - ny^2)\,dx^2}{y^2} + dx^2$$

$$= \frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]\,dx^2}{y^2};$$

differentiiren wir die erste Differentialgleichung abermals, so ist $y\,d^2y + dy^2 = -n\,dx^2$, daher

$$d^2y = -\frac{dy^2 + ndx^2}{y} = -\frac{ndx^2 + \left(\frac{p^2 - ny^2}{y^2}\right)dx^2}{y}$$

$$= -\frac{(ny^2 + p^2 - ny^2)\,dx^2}{y^3} = -\frac{p^2\,dx^2}{y^3};$$

substituiren wir diese Werthe, so ist

$$\varrho = -\frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]^{\frac{3}{2}} \cdot dx^3}{y^3} : -\frac{p^2\,dx^2}{y^3}$$

$$= \frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

es ist aber (§. 59.)

$$\text{norm.} = \sqrt{p^2 + (1-n)(2px - nx^2)} = \sqrt{p^2 + (1-n)y^2},$$

daher $\varrho = \frac{\text{norm.}^3}{p^2}$. Da in dem Scheitel der Kegelschnitte, welcher hier der Ursprung der Coordinaten ist, $y = o$, so ist in diesem Punkte der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{p^3}{p^2} = p = \text{dem halben Parameter.}$$

§. 65.

Es sey **A** (Fig. 13.) der allgemeine Punkt der krummen Linie, dessen Coordinaten x und y sind; es sey in A der Krümmungshalbmesser $= \varrho$; die Coordinaten des Mittelpunktes **B** des Krümmungskreises seyen α und β, so werden nach dem vorigen §. diese drei Größen durch die drei Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2 \ldots\ldots (1),$$

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = o \ldots\ldots (2),$$

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\,d^2y = o \ldots\ldots (3),$$

bestimmt. Es sey **C** ein Punkt der krummen Linie, dessen Coordinaten unendlich wenig von denen von **A** verschieden, also $x + dx$ und $y + dy$ sind; es ist dann der Krümmungshalbmesser in **C**, $CD = \varrho + d\varrho$, und die Coordinaten des Mittelpunktes **D** des Krümmungskreises sind $\alpha + d\alpha$ und $\beta + d\beta$; um nun das Verhalten zwischen dx, dy, $d\varrho$, $d\alpha$ und $d\beta$ zu bestimmen, so differentiiren wir die Gleichungen 1 und 2 unter der Voraussetzung, daß

x, y, ϱ, α und β sich zu gleicher Zeit ändern, und erhalten so

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\varrho\,d\varrho,$$

$$dx^2+dy^2-d\alpha\,dx-d\beta\,dy+(y-\beta)\,d^2y+o;$$

ziehen wir von der ersten dieser Gleichungen die Gleichung 2, von der zweiten die Gleichung 3 ab, so ist

$$-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\varrho\,d\varrho \quad \ldots\ldots (4),$$

$$-d\alpha\,dx-d\beta\,dy=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Denken wir uns auf dieselbe Weise in einem jeden Punkte der gegebenen krummen Linie den Krümmungshalbmesser geführt, so liegen die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise auf einer krummen Linie, welche man die entwickelte der gegebenen nennt, und diese gegebene Linie selbst nennt man die entwickelnde. Aus den vorigen Gleichungen lassen sich leicht die folgenden merkwürdigen Eigenschaften der entwickelten Linie herleiten.

Die Coordinaten des allgemeinen Punktes der entwickelten Linie sind α und β. Die Gleichung 2 läßt sich auch so anschreiben: $\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x)$; aus der Gleichung 5 folgt aber $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{dx}{dy}$; substituiren wir diese Werthe, so ist $\beta-y=\frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha-x)$; eine jede Normale der entwickelnden krummen Linie ist also eine Tangente der entwickelten.

Setzen wir aus dieser Gleichung den Werth von $y-\beta$ in die Gleichung 1, so ist $\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2$,

$\frac{(d\beta^2+d\alpha^2)(x-\alpha)^2}{d\alpha^2}=\varrho^2$, daher $x-\alpha=\frac{\varrho\,d\alpha}{\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}}$;

es ist also $y-\beta=\frac{\varrho\,d\beta}{\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}}$; setzen wir diese Werthe in die Gleichung 4, so ist $-\frac{\varrho\,d\alpha^2+\varrho\,d\beta^2}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}=\varrho\,d\varrho$, daher

$d\varrho = - \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$; da nun aber $d\alpha$ und $d\beta$ die Differentialen der Coordinaten von B sind, so ist $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ = dem verschwindend kleinen Bogen BD; die Krümmungshalbmesser der entwickelnden Linie und die entsprechenden Bögen der entwickelten nehmen also von einem Punkte zu einem andern um gleiche Differenzen zu.

Denken wir uns also die entwickelte Linie mit einem biegsamen, undehnbaren, unendlich dünnen Faden bekleidet; die Verlängerung NM dieses Fadens sey geradlinicht und der Entwickelten tangent, N sey ein Punkt der Entwickelnden, so ist NM in diesem Punkte der Krümmungshalbmesser. Denken wir uns nun den krummlinichten Theil dieses Fadens dergestalt aufgezogen, daß er gespannt und der Entwickelten tangent bleibt, so wird der Punkt N die Entwickelnde beschreiben; denn da nach Annahme der Faden undehnbar ist, so nimmt die Tangente CD der Entwickelten, welche zugleich die Normale der Entwickelnden ist, immer um gleiche Differenzen mit dem Bogen der Entwickelten zu.

Es ist also ein Bogen MD der Entwickelten = der Differenz der beiden Krümmungshalbmesser CD und MN; wenn nun die Entwickelnde eine algebraische krumme Linie ist, so sind auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy^2}{dx^2}$, daher auch die Krümmungshalbmesser MN und CD algebraische Funktionen der Coordinaten von N und C, folglich auch der Coordinaten von M und D, wie wir in dem nächsten §. sehen werden; es ist also dann ein jeder Bogen der entwickelten Linie rektifizirbar, d. h., er ist eine algebraische Funktion der Coordinaten seiner Endpunkte.

§. 66.

Wir haben (§. 64.) gesehen, daß $y - \beta = - \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$,

und $x - \alpha = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$; wenn wir nun zwi-

schen diesen beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung der Entwickelnden x und y eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur noch α und β vorkommen, welche also die Gleichung zwischen den Coordinaten des Mittelpunktes eines beliebigen Krümmungskreises, d. h., die Gleichung der Entwickelten ist.

Beispiel. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = 2px$; es ist also $y\,dy = p\,dx$, $dy = \frac{p\,dx}{y}$, $dy^2 = \frac{p^2\,dx^2}{y^2}$, $dy^2 + dx^2 = \frac{p^2 + y^2}{y^2} \cdot dx^2$; differentiiren wir die erste Differentialgleichung abermals, so ist $y\,d^2y + dy^2 = o$, daher $d^2y = -\frac{dy^2}{y} = -\frac{p^2\,dx^2}{y^3}$; substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}, \quad x - \alpha = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

so ist

$$y - \beta = -\frac{p^2+y^2}{y^2}\,dx^2 : -\frac{p^2dx^2}{y^3} = \frac{y(p^2+y^2)}{p^2} = y + \frac{y^3}{p^2};$$

es ist also $\beta = -\frac{y^3}{p^2}$; eben so ist

$$x - \alpha = \frac{p}{y} \cdot \frac{p^2 + y^2}{y^2}\,dx^2 : -\frac{p^2\,dx^2}{y^3}$$

$$= -\frac{p^2 + y^2}{p} = -\frac{p^2 + 2px}{p} = -p - 2x;$$

es ist also $3x = \alpha - p$; substituiren wir nun in $y^2 = 2px$ die Werthe $y = -(\beta p^2)^{\frac{1}{3}}$, $x = \frac{\alpha - p}{3}$,

so ist $(\beta p^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{2p\,(\alpha - p)}{3}$,

$$\beta^2 p^4 = \frac{8p^3\,(\alpha - p)^3}{27}, \quad \beta^2 = \frac{8\,(\alpha - p)^3}{27p};$$

verlegen wir die Axe Y in paralleler Richtung so, daß die Abszissen um p kleiner werden, d. h., setzen wir $\alpha - p = \alpha'$,

so ist $\beta^2 = \frac{8\alpha'^3}{p}$; die Entwickelte der Parabel von dem zweiten Grade ist also die zweite kubische Parabel.

§. 67.

Zuweilen wird die Gleichung einer krummen Linie durch Polarcoordinaten ausgedrückt, d. h., es wird eine Gleichung zwischen der Linie $OB = z$ (Fig. 14.), welche einen Punkt B der krummen Linie mit dem festen Punkte O, dem Pole, verbindet, und welche man den Leitstrahl von B nennt, und dem Winkel $BOZ = \varphi$, welchen der Leitstrahl mit einer beständigen Linie OZ, der Axe, bildet, gegeben. Dieser Winkel BOZ wird durch den von dem Mittelpunkte O aus mit dem Halbmesser $OA = 1$ beschriebenen Kreisbogen AD gemessen.

Drücken wir nun auch die Subtangente, die Subnormale und den Krümmungshalbmesser durch Polarcoordinaten aus. Es sey X, Y ein durch O gehendes rechtwinkliges Coordinatensystem; die Axe X bilde mit Z den Winkel $XOZ = \theta$, so ist der Winkel $BOX = \varphi - \theta$; führen wir $BC = y$, so ist $OC = x$.

Es ist $BC = BO \sin. BOX$, und $OC = BO \cos. BOX$, daher $y = z \sin. (\varphi - \theta)$, und $x = z \cos. (\varphi - \theta)$; differentiiren wir diese beiden Gleichungen, so ist

$$dy = dz \sin. (\varphi - \theta) + z \cos. (\varphi - \theta)\, d\varphi,$$

$$dx = dz \cos. (\varphi - \theta) - z \sin. (\varphi - \theta)\, d\varphi;$$

es ist also (§. 59.) die Subtangente

$$= z \sin. (\varphi - \theta) \cdot \frac{dz \cos. (\varphi - \theta) - z \sin. (\varphi - \theta)\, d\varphi}{dz \sin. (\varphi - \theta) + z \cos. (\varphi - \theta)\, d\varphi},$$

und die Subnormale

$$= z \sin. (\varphi - \theta) \cdot \frac{dz \sin. (\varphi - \theta) + z \cos. (\varphi - \theta)\, d\varphi}{dz \cos. (\varphi - \theta) - z \sin. (\varphi - \theta)\, d\varphi}.$$

Da die Axe X willkührlich angenommen werden kann, so wollen wir derselben eine solche Lage OT geben, daß der Winkel $\varphi - \theta = 90°$, also $\theta = TOZ = \varphi - 90°$; es ist dann $\sin. (\varphi - \theta) = 1$, $\cos. (\varphi - \theta) = 0$, daher

die Subtangente $OT = -\frac{z^2 d\varphi}{dz}$, und die Subnormale $ON = -\frac{dz}{d\varphi}$.

Beispiel. Die Gleichung der Spiralen ist $z = a\varphi^n$; es ist also $dz = n a \varphi^{n-1} d\varphi$, $\frac{dz}{d\varphi} = n a \varphi^{n-1}$, daher die Subtangente $OT = -\frac{a^2 \varphi^{2n}}{n a \varphi^{n-1}} = -\frac{a\varphi^{n+1}}{n}$, und die Subnormale $= -n a \varphi^{n-1}$.

§. 68.

Quadriren wir die allgemeinen Werthe von dy und dx, so ist

$dy^2 = dz^2 \sin.(\varphi-\theta)^2 + 2z \sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta) dz\, d\varphi + z^2 \cos.(\varphi-\theta)^2 d\varphi^2$, und $dx^2 = dz^2 \cos.(\varphi-\theta)^n - 2z \sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta) dz\, d\varphi + z^2 \sin.(\varphi-\theta)^2 d\varphi^2$; addiren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir $dy^2 + dx^2 = dz^2 + z^2 d\varphi^2 =$ dem Quadrate des Differentials des Bogens der krummen Linie.

Differentiiren wir die allgemeinen Ausdrücke von dy und dx abermals, indem wir annehmen, daß x abermals den Zuwachs dx erhalte, wodurch dy um d^2y, dz um d^2z, $d\varphi$ um $d^2\varphi$ zunimmt, so erhalten wir

$$d^2y = d^2z \sin.(\varphi-\theta) + 2\cos.(\varphi-\theta) dz\, d\varphi - z \sin(\varphi-\theta) d\varphi^2 + z\cos.(\varphi-\theta) d^2\varphi;$$
$$o = d^2z \cos.(\varphi-\theta) - 2\sin.(\varphi-\theta) dz\, d\varphi - z\cos.(\varphi-\theta) d\varphi^2 - z\sin.(\varphi-\theta) d^2\varphi.$$

Nehmen wir die Lage der Axe X wieder so an, daß der Winkel $\varphi-\theta = 90°$, daher $\sin.(\varphi-\theta) = 1$, $\cos.(\varphi-\theta) = o$, so ist $d^2y = d^2z - z\,d\varphi^2$, $2\,dz\,d\varphi + z\,d^2\varphi = o$; substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir den Krümmungshalbmesser $\rho = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = \frac{(dz^2+z^2\,d\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{z\,d\varphi\,(d^2z - z\,d\varphi^2)}$. Indem wir die Gleichung der krummen Linie differentiiren, so haben wir, weil z und φ als Funktionen von x betrachtet wer-

den, zugleich dz und $d\varphi$ als veränderlich anzunehmen; wir eliminiren sodann $d^2\varphi$ vermittelst der Gleichung $2\,dz\,d\varphi + z\,d^2\varphi = 0$.

Von der Änderung der Abhängigkeit des Differentials einer veränderlichen Größe.

§. 69.

Wir haben (§. 28.) die höheren Differentialquotienten von y bestimmt, unter der Voraussetzung, daß y eine Funktion von x sey; wir nahmen daher an, daß die verschiedenen Änderungen des Zustandes der Funktion dadurch erfolgten, daß x immer einen nämlichen Zuwachs dx erhielt.

Wir können aber auch x als eine Funktion von y betrachten; wir können also auch annehmen, daß bei den verschiedenen Änderungen des Zustandes der Funktion y immer einen nämlichen Zuwachs dy erhalte; es wird dann dx nicht mehr beständig seyn, sondern, indem y sich in $y + dy$ verwandelt, wird x sich in $x + dx$, und dx sich in $dx + d^2x$ verwandeln, d. h., das Differential von dx wird jetzt d^2x seyn.

Bezeichnen wir wieder den ersten, zweiten, dritten, u. s. w., Differentialquotienten durch p, q, r u. s. w., wie in (§. 28.), und bestimmen wir deren Ausdruck unter der Voraussetzung, daß y immer einen nämlichen Zuwachs dy erhält, dy also bei den verschiedenen auf einander folgenden Differentiationen beständig ist. Der erste Differentialquotient ist

$\frac{dy}{dx}$; der zweite Differentialquotient ist $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dp}{dx} = q$;

es ist aber gegenwärtig $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{dy\,d^2x}{dx^2}$, daher

$q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$. Der dritte Differentialquotient ist

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{d\left(-\frac{dy\,d^2x}{dx^3}\right)}{dx};$$

es ist aber

$$d\left(\frac{-\,dy\,d^2x}{dx^3}\right) = \frac{-\,dy\,d^3x\,dx^3 + 3\,dy\,(d^2x)^2\,dx^2}{dx^6}$$

$$= \frac{-\,dy\,dx\,d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^4},$$

also $r = \frac{-\,dy\,dx\,d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5}$; und eben so drücken wir die höhern Differentialquotienten aus.

§. 70.

Die Änderungen des Zustandes der Funktion y von x können jedoch auch so stattfinden, daß das Differential einer Funktion T von x und y immer dasselbe bleibt; indem also jetzt T sich in T + dT verwandelt, so verwandelt sich dx in dx + d^2x und dy in dy + d^2y, d. h., in dem Ausdrucke der höhern Differentialquotienten müssen jetzt dx und dy zugleich als veränderlich betrachtet werden.

Es ist also jetzt $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$;

es ist aber $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$, indem dx und dy veränderlich sind, daher $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$; eben so ist $r = \frac{dq}{dx} = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}\right)$; es ist aber

$$d\left(\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}\right) =$$

$$\frac{dx^3(d^2x\,d^2y + dx\,d^3y - dy\,d^3x - d^2y\,d^2x) - 3dx^2\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^6}$$

$$= \frac{dx^2\,d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,(d^2x)^2 - dy\,dx\,d^3x}{dx^4};$$

es ist also r

$$= \frac{dx^2\,d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,(d^2x)^2 - dy\,dx\,d^3x}{dx^5};$$

und eben so bestimmen wir die allgemeinen Ausdrücke der höhern Differentialquotienten s, t, u. s. w.

Wenn wir dx beständig, also $d^2x = o$ setzen, so verwandeln sich diese Ausdrücke in die des §. 28.; wenn wir dy beständig, also $d^2y = o$ setzen, so verwandeln sich diese Ausdrücke in die des vorigen §. Wenn aber das Differential einer Funktion T von x und y beständig gesetzt wird, so ist $d^2 T = o$; da nun dieses eine Gleichung zwischen d^2y und d^2x ist, so erkennen wir dadurch das Verhalten zwischen den höheren Differentialen d^2y und d^2x.

Da $\frac{dy}{dx} = p$ eine bestimmte Funktion von x ist, so ist auch $q = \frac{dp}{dx}$ eine bestimmte Funktion von x; aus derselben Ursache ist auch $r = \frac{dq}{dx}$ eine bestimmte Funktion von x, u. s. w.

Die allgemeinen Ausdrücke der höhern Differentialquotienten erscheinen also unter einer andern Gestalt, je nachdem man das Differential einer andern Funktion von x beständig annimmt; ihre endlichen Werthe sind aber von diesen Annahmen unabhängig, weil ein jeder höhere Differentialquotient der erste Differentialquotient seines vorhergehenden ist.

§. 71.

Vermittelst der folgenden geometrischen Betrachtungen können wir uns deutlicher vorstellen, auf welche Weise man veranlaßt werden kann, das Differential einer bestimmten Funktion von x in den allgemeinen Ausdrücken der höhern Differentialquotienten als beständig anzusehen.

Es sey BH (Fig. 15.) die krumme Linie, deren Lauf durch die zwischen x und y gegebene Gleichung vorgestellt wird. Es sey B ein allgemeiner Punkt der krummen Linie, dessen $y = BA$, und $x = OA$.

Mit Hülfe der Differentialrechnung bestimmen wir das Gesetz der Aufeinanderfolge der Punkte der krummen Linie; die Art des fortgesetzten Überganges von einem Punkte der

krummen Linie zu einem unendlich nahe dabei gelegenen kann aber einem jeden beliebigen Gesetze unterworfen werden.

So können wir eine solche Aufeinanderfolge der Punkte der krummen Linie annehmen, daß die verschwindend kleine Differenz der auf einander folgenden Abszissen

$$= dx = AC = CE = EG = \ldots.$$

Wir gelangen also von B zu D, indem wir $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y in die Gleichung der krummen Linie setzen, d. h., indem wir dieselbe nach x und y differentiiren; wir gelangen von D zu F, indem wir abermals $x + dx$ statt x setzen; dadurch verwandelt sich y in $y + dy$ und dy in $dy + d^2y$; wir differentiiren also die vorige Differentialgleichung; indem wir x, y und dy als veränderliche Größen betrachten; wir gelangen von F zu H, indem wir abermals $x + dx$ statt x setzen; dadurch verwandelt sich y in $y + dy$, dy in $dy + d^2y$, d^2y in $d^2y + d^3y$; wir differentiiren also die vorige Differentialgleichung, indem wir x, y, dy und d^2y als veränderliche Größen betrachten; u. s. w.

Wir können jedoch die Aufeinanderfolge der Punkte der krummen Linie auch so annehmen, daß die verschwindend kleine Differenz dy je zweier auf einander folgender Ordinaten immer dieselbe bleibt; in diesem Falle ist bei den auf einander folgenden Differentiationen dy als beständig, dagegen dx, d^2x, d^3x, u. s. w., als veränderlich anzusehen.

Wir können uns auch die Aufeinanderfolge der Punkte der krummen Linie so vorstellen, daß das Differential irgend einer Funktion von x beständig bleibt; in diesem Falle ist bei den auf einander folgenden Differentiationen sowohl dy, d^2y, d^3y, u. s. w., als auch dx, d^2x, d^3x, u. s. w., als veränderlich anzusehen. So, z. B., können wir annehmen, daß von einem Punkte der krummen Linie zu dem unendlich nahe dabei gelegenen immer die Bogen

$$BD = DF = FH = \ldots\ldots = ds;$$

es ist dann $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als beständig anzusehen; oder auch, wir können annehmen, daß von einem Punkte

zu dem unendlich nahe dabei gelegenen die Segmente

$$BACD = DCEF = FEGH = \ldots\ldots = y\,dx;$$

es ist dann ydx als beständig anzusehen, u. s. w.

Es ist jedoch klar, daß, indem wir von einem Punkte der krummen Linie zu einem unendlich nahe dabei gelegenen, und von diesem zu einem folgenden, u. s. w., übergehen, d. h., indem wir eine zwischen x und y gegebene Gleichung wiederholt differentiiren, das Differential einer bestimmten Funktion von x als beständig angenommen werden muß; denn sonst ist das Gesetz der Aufeinanderfolge der Punkte willkührlich.

§. 72.

In den Anwendungen der Differentialrechnung ereignet es sich öfters, daß man zu Differentialgleichungen gelangt, in welchen dx als beständig vorausgesetzt wird, und daß man diese sodann wieder in andere umwandeln will, in welchen das Differential einer Funktion T von x als beständig angenommen wird. Um dieses zu bewerkstelligen, so bemerken wir, daß nun $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, u. s. w.; substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir eine Gleichung, in welcher sämmtliche Differentialen verschwunden sind. Wir setzen sodann statt q, r, u. s. w., aus (§. 70.) ihre allgemeinen Werthe, in welchen weder dx noch dy als beständig angenommen ist; da nun dT nach Annahme beständig seyn soll, so ist $d^2T = o$; hierdurch erhalten wir eine Gleichung zwischen d^2x und d^2y, und können auf diese Weise das eine dieser beiden Differentialen durch das andere ausdrücken, und in den Werth von q substituiren; indem wir $d^2T = o$ abermals differentiiren, so ist $d^3T = o$; dieses ist eine Gleichung zwischen d^3x und d^3y; wir können die eine dieser beiden Differentialen durch die andere ausdrücken, und in den Werth von r substituiren, u. s. w.

Indem wir dx beständig setzten, haben wir (§. 64.) den Krümmungshalbmesser ausgedrückt erhalten durch

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

setzen wir statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ihre Werthe p und q, so ist

$$\varrho = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q};$$ indem wir also die beiden Differentialen als veränderlich betrachten, so ist

$$\varrho = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}} = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Wenn wir dy als beständig annehmen, so ist $d^2y = o$,

daher $\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x}$.

Wenn wir ds als beständig annehmen, so ist

$d(ds^2) = d(dx^2 + dy^2) = 2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y = o$,

daher $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$, folglich $dx\,d^2y - dy\,d^2x = dx\,d^2y + \frac{dy^2\,d^2y}{dx} = \frac{(dy^2 + dx^2)\,d^2y}{dx}$;

es ist also

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2y}{dx}} = -\frac{dx\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y}$$

$$= -\frac{dx\,ds}{d^2y} = \frac{dy\,ds}{d^2x}.$$

§. 73.

Umgekehrt ist es zuweilen der Fall, daß eine Differentialgleichung gegeben ist, in welcher das Differential dT einer Funktion von x als beständig angenommen wurde, und daß man diese Gleichung in eine andere umwandeln

will, in welcher sodann das Differential einer beliebigen andern Funktion von x als beständig angenommen werden kann. Das Verfahren, vermittelst welches wir dieses bewerkstelligen, wird uns durch das folgende Beispiel deutlich werden.

Es sey eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung $M d^2x + N dx dy + P d^2y + Q dx^2 + R dy^2 = o$, in welcher das Differential einer Funktion T von x als beständig angenommen wurde; M, N, P, Q, R seyen gegebene Funktionen von x und y. Differentiiren wir die Gleichung $dy = p\,dx$ in Beziehung auf die Veränderlichkeit von x und y, so ist $d^2y = dp\,dx + p d^2x = q\,dx^2 + p d^2x$, weil $dp = q\,dx$; es ist aber auch $d^2T = o$ eine Gleichung zwischen d^2x und d^2y; die aus diesen beiden Gleichungen bestimmten Werthe von d^2x und d^2y werden nur p, q, dx und dy enthalten; setzen wir diese Werthe, und außerdem noch $dy = p\,dx$ in die gegebene Differentialgleichung, so wird dieselbe durch dx^2 theilbar seyn, und sie wird nur noch die allgemein ausgedrückten Differentialquotienten p und q enthalten; wir können also jetzt dx oder dy oder überhaupt das Differential einer beliebigen Funktion von x als beständig annehmen.

Es sey, z. B., die gegebene Differentialgleichung unter der Annahme, daß ds beständig ist, aufgestellt worden; es ist dann $d(ds^2) = d(dx^2 + dy^2) = 2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y = o$, folglich $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx} = -p d^2y$; setzen wir diesen Werth in die Gleichung $d^2y = q dx^2 + p d^2x$, so ist $d^2y = q\,dx^2 - p^2\,d^2y$, $d^2y = \frac{q\,dx^2}{1+p^2}$, folglich $d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2}$; setzen wir diese Werthe in die gegebene Differentialgleichung, und außerdem noch $dy = p\,dx$, so ist

$$-\frac{Mpq\,dx^2}{1+p^2} + Np\,dx^2 + \frac{Pq\,dx^2}{1+p^2} + Q\,dx^2 + Rp^2\,dx^2 = o,$$

daher, indem wir durch $-dx^2$ dividiren,

$$\frac{Mpq}{1+p^2} - Np - \frac{Pq}{1+p^2} - Q - Rp^2 = 0.$$

In diese Gleichung haben wir vorerst statt q seinen allgemeinen Ausdruck zu setzen; sodann können wir das Differential einer beliebigen Funktion von x als beständig annehmen.

Von der Differentiation einer Funktion zweier oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 74.

Wenn z eine Funktion zweier veränderlichen Größen x und y ist, und wenn x und y unabhängig von einander sind, so kann z auf drei verschiedene Arten eine Änderung erleiden; nämlich: 1) indem nur x sich ändert und y ungeändert bleibt; 2) indem nur y sich ändert und x ungeändert bleibt; 3) indem x und y zu gleicher Zeit sich ändern.

So, z. B., ist der Flächeninhalt eines Rechteckes eine Funktion seiner Höhe und seiner Breite; dieser Flächeninhalt ändert sich 1) indem die Höhe sich ändert, und die Breite ungeändert bleibt; 2) indem die Breite sich ändert, und die Höhe ungeändert bleibt; 3) indem zugleich die Breite und die Höhe sich ändern.

Wenn nur x sich um dx ändert, und y dabei ungeändert bleibt, so nennt man die daraus erfolgende Änderung von z das partiale Differential von z nach x; wenn nur y sich um dy ändert, und x dabei ungeändert bleibt, so nennt man die daraus erfolgende Änderung von z das partiale Differential von z nach y; wenn dagegen x und y sich zugleich um dx und dy ändern, so nennt man die daraus erfolgende Änderung von z das vollständige Differential von z.

§. 75.

Um nun das vollständige Differential von z zu bestimmen, so haben wir anzunehmen, daß x sich in $x + dx$, y sich in $y + dy$, z sich in $z + dz$ verwandle, d. h., wir haben die zwischen z, x und y gegebene Gleichung zu differentiiren, indem wir zugleich z, x und y als veränderlich betrachten. Der aus der so erhaltenen Differentialgleichung genommene Werth von dz läßt sich im allgemeinen vorstellen durch $dz = P\,dx + Q\,dy$. Das partiale Differential nach x erhalten wir, indem wir y beständig, also $dy = o$ setzen; dasselbe ist also $dz = P\,dx$, daher der nach x genommene Differentialquotient $\frac{dz}{dx} = P$; das partiale Differential nach y erhalten wir, indem wir x beständig, also $dx = o$ setzen, dasselbe ist also $dz = Q\,dy$, daher der nach y genommene Differentialquotient $\frac{dz}{dy} = Q$. Wir erhalten also das vollständige Differential von z, indem wir sein partiales Differential nach x, und sein partiales Differential nach y addiren.

Da $P = \frac{dz}{dx}$, und $Q = \frac{dz}{dy}$, so können wir das vollständige Differential auch so ausdrücken:

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy.$$

Hier müssen wir uns jedoch immer erinnern, daß $\frac{dz}{dx}$ nicht das vollständige Differential dz, dividirt durch dx, vorstellt, sondern den aus der zwischen x, y und z bestehenden Gleichung gezogenen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, welchen wir erhalten, indem wir bei der Differentiation nur x und nicht y als veränderlich betrachten, und daß es sich eben so mit $\frac{dz}{dy}$ verhält; es ist also dieses $\frac{dz}{dx}\,dx$ nicht mit dz zu ver-

wechseln, indem jenes das partiale Differential von z nach x, dieses das vollständige Differential von z ist. Um Mißverständnissen vorzubeugen, schließen mehrere Mathematiker die partialen Differentialquotienten unter eine Parenthese ein, und stellen sie also durch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ vor; wenn man sich dieser Bezeichnungsweise bedient, so erscheint also das vollständige Differential dz unter der Gestalt:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy;$$

indessen, wenn man sich nur immer an die vorige Bemerkung erinnert, so kann man die Parenthesen weglassen, welches wir auch in der Folge thun werden. Wenn uns das vollständige Differential dz, dividirt durch dx, vorkömmt, so werden wir dasselbe so anschreiben: $\frac{1}{dx} . dz$, wodurch also allen Verwechselungen begegnet wird.

Die folgenden Beispiele werden uns die bisherigen Betrachtungen deutlicher machen.

Es sey $z = x^2 - mxy + y^2 + a^2$; das Differential von z nach x ist $2x\,dx - my\,dx$, daher $\frac{dz}{dx} = 2x - my$; das Differential von z nach y ist $-mx\,dy + 2y\,dy$, daher $\frac{dz}{dy} = -mx + 2y$; das vollständige Differential ist also:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = (2x - my)\,dx + (2y - mx)\,dy,$$

wie wir auch erhalten, indem wir die ursprüngliche Gleichung differentiiren; und x und y zugleich als veränderlich annehmen.

Es sey $z = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$,

so ist $\frac{dz}{dx} = 2x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2-y^2)$

$$= \frac{x(x^2 + 3y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\text{und } \frac{dz}{dy} = -2y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - y(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{y(3x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

es ist also das vollständige Differential

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = \frac{x\,dx(x^2+3y^2) - y\,dy(3x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Es sey $z = \text{arc. tg.} \frac{x}{y}$, so ist $\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\text{und } \frac{dz}{dy} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\text{es ist also } dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}.$$

§. 76.

Bei der Bildung der höheren ganzen oder partialen Differentialen von z können wir dx und dy zugleich als unveränderlich annehmen, weil nach der Voraussetzung x und y unabhängig von einander sind.

Da der erste Differentialquotient von z nach x, $\frac{dz}{dx} = P$, wieder eine Funktion von x und y ist, so können wir abermals dessen partiales Differential nach x, und eben so dessen partiales Differential nach y nehmen; wir erhalten so

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}dx = \frac{dP}{dx}dx, \text{ und } \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}dy = \frac{dP}{dy}dy;$$ größerer

Einfachheit halber stellen wir $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}$ durch $\frac{d^2z}{dx^2}$, und

$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}$ durch $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ vor, wo also, z. B., $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ den Differentialquotienten der Funktion zuerst nach x, und sodann nach y vorstellt, welchen wir erhalten, indem wir die Funktion nach x differentiiren, und sodann durch dx dividiren, und diesen Differentialquotienten abermals nach y differentiiren, und sodann durch dy dividiren.

Eben so folgen aus $\frac{dz}{dy} = Q$ die zweiten Differentialen

$$\frac{d^2z}{dy\,dx}\,dx = \frac{dQ}{dx}\,dx, \text{ und } \frac{d^2z}{dy^2}\,dy = \frac{dQ}{dy}\,dy.$$

Auf dieselbe Weise stellen wir im allgemeinen durch $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\,dx^m dy^n$ das $(m+n)$ te partiale Differential von z vor, welches gebildet wird, indem wir die Funktion vorerst m mal nach x, und dieses so erhaltene n te Differential n mal nach y differentiiren; und durch $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$ stellen wir den entsprechenden Differentialquotienten vor.

Beispiel. Es sey $z = x^4 - my^2x^2 + y^4 - a^4$, so ist

$$P = \frac{dz}{dx} = 4x^3 - 2my^2x,\quad Q = \frac{dz}{dy} = -2myx^2 + 4y^3;$$

vermittelst der Differentiation dieser ersten Differentialquotienten erhalten wir:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 3\,.\,4x^2 - 2my^2,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\,2\,.\,2\,mxy,$$

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = -\,2\,.\,2mxy,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\,2mx^2 + 3\,.\,4y^2;$$

vermittelst der Differentiation dieser zweiten Differentialquotienten erhalten wir

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 2\,.\,3\,.\,4x,\quad \frac{d^3z}{dx^2\,dy} = -\,2\,.\,2\,my,$$

$$\frac{d^3z}{dx\,dy\,dx} = -\,2\,.\,2\,my,\quad \frac{d^3z}{dx\,dy^2} = -\,2\,.\,2\,mx,$$

$$\frac{d^3z}{dy\,dx^2} = -2\,.\,2\,my,\ \frac{d^3z}{dy\,dx\,dy} = -2\,.\,2\,mx,$$

$$\frac{d^3z}{dy^2\,dx} = -2\,.\,2\,mx,\ \frac{d^3z}{dy^3} = 2\,.\,3\,.\,4\,y;$$

und eben so bilden wir die vierten Differentialquotienten von z vermittelst der Differentiation der dritten Differentialquotienten.

§. 77.

Eine Funktion z von x und y können wir im allgemeinen immer durch die Reihe

$$z = Ax^{\alpha}\,y^{\beta} + Bx^{\gamma}\,y^{\delta} + \ldots.$$

ausdrücken, in welcher Gleichung A, α, β; B, γ, δ; u. s. w., beständige Größen sind, deren Werthe durch die Art der gegebenen Funktion bestimmt werden. Differentiiren wir diese Gleichung nach x, so ist

$$\frac{dz}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1}\,y^{\beta} + B\gamma x^{\gamma-1}\,y^{\delta} + \ldots..$$

Differentiiren wir diese Differentialgleichung abermals nach y, so ist

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = A\alpha\beta x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1} + B\gamma\delta x^{\gamma-1}\,y^{\delta-1} + \ldots.$$

Differentiiren wir die ursprüngliche Gleichung nach y, so ist

$$\frac{dz}{dy} = A\beta x^{\alpha}\,y^{\beta-1} + B\delta x^{\gamma}\,y^{\delta-1} + \ldots.;$$

differentiiren wir diese Differentialgleichung abermals nach x, so ist

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = A\alpha\beta x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1} + B\gamma\delta x^{\gamma-1}\,y^{\delta-1} + \ldots.;$$

die Werthe von $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ und $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ sind also auf dieselbe Weise ausgedrückt; es ist also $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2y}{dy\,dx}$. Wenn wir also eine Funktion von x und y zuerst nach x und sodann nach y differentiiren, so erhalten

wir dasselbe Resultat, als wenn wir dieselbe zuerst nach y und sodann nach x differentiiren.

Ich behaupte nun, daß im allgemeinen

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n} = \frac{d^{m+n}z}{dy^n\,dx^m},$$

d. h., daß wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir die Funktion zuerst m mal nach x, sodann n mal nach y, als auch, wenn wir die Funktion zuerst n mal nach y und sodann n mal nach x differentiiren.

Betrachten wir den ersten Theilsatz $A\,x^\alpha\,y^\beta$ der Reihe, durch welche der Werth von z ausgedrückt ist; setzen wir größerer Kürze halber $A\,x^\alpha = X$, $y^\beta = Y$, so ist $A\,x^\alpha\,y^\beta = XY$. Differentiiren wir diese Gleichung n mal hintereinander nach x, so ist, weil bei diesen Differentiationen Y als eine beständige Größe zu betrachten ist,

$$\frac{d^m(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dx^m} = Y\,\frac{d^mX}{dx^m};$$

differentiiren wir diese letztere Gleichung abermals n mal nach y, so ist, weil hierbei $\frac{d^mX}{dx^m}$ als eine beständige Größe zu betrachten ist,

$$\frac{d^{m+n}(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dx^m\,dy^n} = \frac{d^nY}{dy^n}\cdot\frac{d^mX}{dx^m}.$$

Differentiiren wir die obige Gleichung n mal nach y, so ist

$$\frac{d^n(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dy^n} = X\,\frac{d^nY}{dy^n};$$

differentiiren wir diese Gleichung abermals m mal nach x, so ist

$$\frac{d^{m+n}(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dy^n\,dx^m} = \frac{d^mX}{dx^m}\,\frac{d^nY}{dy^n};$$

es ist also

$$\frac{d^{m+n}(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dx^m\,dy^n} = \frac{d^{m+n}(A\,x^\alpha\,y^\beta)}{dy^n\,dx^m};$$

da wir nun dasselbe für alle übrige Theilsätze $Bx^\gamma y^\delta$, u. s. w., der Reihe beweisen, so folgt daraus, daß

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n} = \frac{d^{m+n}z}{dy^n\,dx^m}.$$

Beispiel. Es sey $z = \text{arc. tg.}\,\frac{x}{y}$, so ist (§. 75.)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{y^2+x^2}, \text{ und } \frac{dz}{dy} = \frac{-x}{x^2+y^2};$$

es ist also $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{y^2+x^2-2y^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}$,

und $\frac{d^2z}{dy\,dx} = \frac{-(y^2+x^2)+2x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

es ist also $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$, wie wir auch im allgemeinen bewiesen haben.

§. 78.

Bilden wir nun die vollständigen höheren Differentialen der Funktion z von x und y.

Es ist $dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy$; differentiiren wir diese Gleichung abermals, indem wir x und y als veränderlich betrachten, und bemerken, daß

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d^2z}{dx^2}\,dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}\,dy,$$

$$\text{und } d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d^2z}{dy\,dx}\,dx + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy,$$

so erhalten wir das vollständige Differential

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2z}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy^2.$$

Differentiiren wir diese Gleichung abermals nach x und y, indem wir bemerken, daß

$$d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{d^3z}{dx^3}\,dx + \frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dy;$$

$$d\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dx + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\,dy;$$

$$d\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{d^3z}{dy^2\,dx}\,dx + \frac{d^3z}{dy^3}\,dy,$$

so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen das vollständige Differential $d^3z =$

$$\frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2\,dy}dx^2\,dy + 3\frac{d^3z}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3,$$

und eben so bestimmen wir die vollständigen höhern Differentialen von z. Die Übereinstimmung der Coeffizienten dieser Ausdrücke mit den Coeffizienten der binomischen Entwickelung ist augenscheinlich.

§. 79.

Es sey $z = f(x, y)$; es erhalte x den Zuwachs c, und y den Zuwachs h; bestimmen wir den Werth, welchen dadurch $f(x, y)$ erhalten wird.

Wenn nur x sich in $x + c$ verwandelt, und y ungeändert bleibt, also als eine beständige Größe zu betrachten ist, so folgt aus dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 30.)

$$f(x+c,y) = f(x,y) + \frac{dz}{dx}c + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Es verwandle sich jetzt y in $y + h$, so verwandelt sich dadurch

$$f(x+c,y) \text{ in } f(x+c,\ y+h);$$

$$f(x,y) \text{ in } f(x,y) + \frac{dz}{dy}h + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$\frac{dz}{dx} \text{ in } \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx\,dy}h + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots.,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^2\,dy}h + \frac{d^4z}{dx^2\,dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots.,$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} \text{ in } \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^4z}{dx^3\,dy}h + \ldots.$$

Subſtituiren wir dieſe ſämmtlichen Entwickelungen; ſchreiben wir in eine nämliche vertikale Columne die Summe der Theilſätze, in welchen die Summe der Potenzen von c und h dieſelbe iſt, ſo erhalten wir die geſuchte Entwickelung von $f(x+c, y+h)$

$$= f(x,y) + \frac{dz}{dy}h + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{dz}{dy}c + \frac{d^2z}{dy\,dx}ch + \frac{d^3z}{dy^2dx}\frac{ch^2}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^2z}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy\,dx^2}\frac{c^2h}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^3z}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots,$$

welche Entwickelung wir auch ſo anſchreiben können

$$f(x+c, y+h) = f(x, y) + \frac{dz}{dx}c + \frac{dz}{dx}h$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}c^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}ch + \frac{d^2z}{dy^2}h^2\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}c^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}c^2h + 3\frac{d^3z}{dx\,dy^2}ch^2 + \frac{d^3z}{dy^3}h^3\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wir würden daſſelbe Reſultat erhalten haben, wenn wir angenommen hätten, daß zuerſt y ſich in $y+h$, und x ſich in $x+c$ verwandelt, weil im allgemeinen

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n} = \frac{d^{m+n}z}{dy^n\,dx^m}.$$

§. 80.

Wenden wir nun den verallgemeinten Taylor'ſchen Lehrſatz an zur Beſtimmung des **maximum** und **minimum** einer Funktion z zweier veränderlichen Größen x und y. Damit z gegenwärtig ein **maximum** ſey, ſo muß ſein Werth ſolchen Werthen von x und y entſprechen, daß der-

selbe größer ist als ein jeder Werth von z, welcher einem $x + c$ oder $x - c$, und $y + h$ oder $y - h$ entspricht, welches c und h verschwindend kleine Größen vorstellen. Damit z ein minimum sey, so muß sein Werth solchen Werthen von x und y entsprechen, daß er kleiner ist als ein jeder Werth von z, welcher einem $x + c$ oder $x - c$ und einem $y + h$ oder $y - h$ entspricht.

Setzen wir also zuerst $x + c$ und $y + h$, sodann $x + c$ und $y - h$, sodann $x - c$ und $y + h$, sodann $x - c$ und $y - h$ statt x und y in den Ausdruck von z; stellen wir die entsprechenden Werthe von z durch z', z'', z''', z'''' vor, so ist

$$z' = z + \frac{dz}{dx} c + \frac{dz}{dy} h + \ldots\ldots$$

$$z'' = z + \frac{dz}{dx} c - \frac{dz}{dy} h + \ldots\ldots$$

$$z''' = z - \frac{dz}{dx} c + \frac{dz}{dy} h + \ldots\ldots$$

$$z'''' = z - \frac{dz}{dx} c - \frac{dz}{dy} h + \ldots\ldots$$

Wenn ein maximum stattfindet, so muß zugleich $z > z'$, $z > z''$, $z > z'''$, $z > z''''$; wenn ein minimum stattfindet, so muß zugleich $z < z'$, $z < z''$, $z < z'''$, $z < z''''$; indem wir nun c und h verschwindend klein annehmen, so können wir die Theilsätze, in welchen die zweite und höhere Dimensionen von c und h vorkommen, ganz weglassen; wir erkennen also, daß nur dann diesen vier Ungleichheiten zu gleicher Zeit Genüge geleistet werden kann, wenn $\frac{dz}{dx} = o$, $\frac{dz}{dy} = o$; denn vorerst sind c und h unabhängig von einander, es kann also keine Reduktion der beiden Theilsätze $\frac{dz}{dx} c$ und $\frac{dz}{dy} h$ stattfinden; wenn nun $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ nicht $= o$ sind, so ist die eine dieser Differenzen positiv, wenn die andere negativ ist; es kann also dann

kein maximum oder minimum stattfinden. Indem wir die beiden Gleichungen $\frac{dz}{dx} = o$ und $\frac{dz}{dy} = o$ mit der ursprünglichen Gleichung zwischen z, x und y verbinden, so erhalten wir bestimmte Werthe dieser drei veränderlichen Größen; stellen wir die bestimmten Werthe, welche durch deren Substitution $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ erhalten, durch A, B, C vor, so ist, indem wir z in das erste Glied der Gleichung bringen, und die mit den höhern Dimensionen von c und h behafteten Theilsätze vernachlässigen,

$$z' - z = \tfrac{1}{2}(Ac^2 + 2Bch + Ch^2),$$
$$z'' - z = \tfrac{1}{2}(Ac^2 - 2Bch + Ch^2),$$
$$z''' - z = \tfrac{1}{2}(Ac^2 - 2Bch + Ch^2),$$
$$z'''' - z = \tfrac{1}{2}(Ac^2 + 2Bch + Ch^2);$$

diese Differenz erscheint also im allgemeinen unter der Gestalt:

$$\tfrac{1}{2}(Ac^2 \pm 2Bch + Ch^2) = \tfrac{1}{2}A\left(c^2 \pm \frac{2B}{A}ch + \frac{C}{A}h^2\right);$$

addiren und subtrahiren wir zugleich unterhalb der Parenthese $\frac{B^2}{A^2}h^2$, so können wir, weil

$$c^2 \pm 2\frac{B}{A}ch + \frac{B^2}{A^2}h^2 = \left(c \pm \frac{B}{A}h\right)^2,$$

$$\text{und } \frac{C}{A}h^2 - \frac{B^2}{A^2}h^2 = \frac{CA - B^2}{A^2}h^2,$$

diese Differenz auch so anschreiben:

$$\tfrac{1}{2}A\left[\left(c \pm \frac{B}{A}h\right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A^2}\right)h^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}A\left(c \pm \frac{B}{A}h\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{B^2}{A}\right)h^2.$$

Es sind $\left(c \pm \frac{B}{A}h\right)^2$ und h^2 absolut positive Größen, welches auch die Zeichen und Werthe von c und h sind; damit nun z ein maximum sey, so muß diese Diffe-

renz negativ seyn, welches auch das Verhalten der Werthe von c und h sey, es müssen also die beiden Theilsätze dieser Differenz negativ seyn; damit nun $\frac{1}{2} A \left(c \pm \frac{B}{A} h\right)^2$ negativ sey, muß A negativ seyn; damit nun $\left(C - \frac{B^2}{A}\right) h^2$ negativ sey, muß $C - \frac{B^2}{A}$ negativ seyn; nun ist aber $\frac{B^2}{A}$ auf jeden Fall negativ, weil B^2 absolut positiv, und A negativ ist, $\frac{-B^2}{A}$ ist also positiv; damit also $C - \frac{B^2}{A}$ negativ sey, so muß C negativ, und sein absoluter Werth $> \frac{B^2}{A}$ seyn; z ist also ein maximum, wenn A, C und $C - \frac{B^2}{A}$ negativ sind.

Damit z ein minimum sey, so muß diese Differenz für ein jedes Verhalten der Werthe von c und h positiv seyn; ihre beiden Theilsätze müssen also positiv seyn. Damit nun $\frac{1}{2} A \left(c \pm \frac{B}{A} h\right)^2$ positiv sey, so muß A positiv seyn; damit ferner $\frac{1}{2} \left(C - \frac{B^2}{A}\right) h^2$ positiv sey, so muß $C - \frac{B^2}{A}$ positiv seyn; nun ist aber $-\frac{B^2}{A}$ negativ, weil B^2 und A positiv sind; es muß also C positiv, und $> \frac{B^2}{A}$ seyn; es ist also z ein minimum, wenn A, C, $C - \frac{B^2}{A}$ positiv sind. Wenn diese drei bemerkten Umstände nicht gleichzeitig eintreten, so findet weder ein maximum noch ein minimum der Funktion für die entsprechenden Werthe von x und y statt; denn wenn, z. B., A und C positiv sind, dagegen $C - \frac{B^2}{A}$ negativ ist, so ist der erste Theil=

satz $\frac{1}{2} A \left(c \pm \frac{B}{A} h\right)^2$ positiv, und der zweite Theilsatz der Differenz $\frac{1}{2} \left(C - \frac{B^2}{A}\right) h^2$ ist negativ; wir können dann vorerst c und h solche Werthe geben, daß der erste Theilsatz größer als der zweite, die Differenz also positiv ist; wir können aber auch c und h solche Werthe geben, daß der zweite Theilsatz größer als der erste, die Differenz also negativ ist; z ist also dann weder ein maximum, noch ein minimum.

Es könnte jedoch auch stattfinden, daß die substituirten Werthe von x und y $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx\, dy}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$ sich in Null verwandeln; in diesem Falle sind aber die eintretenden Betrachtungen zu verwickelt, um hier eine Stelle finden zu können.

§. 81.

Lösen wir noch einige hierauf sich beziehende Aufgaben auf.

Es sey a in drei solche Theile zu zerlegen, daß das Produkt derselben ein maximum oder minimum sey.

Es sey x der erste, y der zweite Theil, so ist der dritte Theil $= a - x - y$; das Produkt dieser drei Theile sey z, so ist $z = xy\,(a - x - y)$; damit nun z ein maximum oder minimum sey, so muß vorerst

$$\frac{dz}{dx} = y\,(a - x - y) - xy = 0,$$

$$\frac{dz}{dy} = x\,(a - x - y) - xy = 0.$$

Dividiren wir die erste Gleichung durch x, die zweite durch y, so ist $a - 2x - y = 0$, $a - 2y - x = 0$, daher $2x + y = a$, $2y + x = a$, woraus $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ und $a - x - y = \frac{a}{3}$ folgt. Es ist $\frac{d^2 z}{dx^2} = -y - y = -2y$,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = a - x - y - y - x = a - 2x - 2y,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -x - x = -2x;$$

setzen wir statt x und y ihre Werthe, so ist

$$A = -\tfrac{2}{3}a,\quad B = -\tfrac{1}{3}a,\quad C = -\tfrac{2}{3}a;$$

da nun A, B und $C - \frac{B^2}{A} = -\frac{1}{2}a$, negativ sind, so ist $z = \frac{1}{27}a^3$, welches $x = y = a - x - y = \frac{1}{3}a$ entspricht, ein maximum.

§. 82.

Es sey die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien A und B zu bestimmen.

Nehmen wir A als Axe der Z an, die Axen X und Y seyen senkrecht auf A; die Gleichungen der geraden Linie B seyen $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$; nehmen wir auf der geraden Linie A einen Punkt, dessen $z = z''$; auf B einen Punkt, dessen $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, so ist der Ausdruck der Entfernung beider Punkte

$$p = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' - z'')^2};$$

es ist aber $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$,

daher $p = \sqrt{(az' + \alpha)^2 + (bz' + \beta)^2 + (z' - z'')^2}$.

Damit nun p ein minimum sey, so muß

$$\frac{dp}{dz'} = \frac{(az' + \alpha)a + (bz' + \beta)b + (z' - z'')}{\sqrt{(az' + \alpha)^2 + (bz' + \beta)^2 + (z' - z'')^2}} = 0,$$

$$\frac{dp}{dz''} = \frac{z'' - z'}{\sqrt{(az' + \alpha)^2 + (bz' + \beta)^2 + (z' - z'')^2}} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $z' = z''$; setzen wir diesen Werth in die erste Gleichung, und sodann den Werth von z' in die Gleichungen der geraden Linie, so ist

$$z' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2},\quad x' = \frac{b(b\alpha - a\beta)}{a^2 + b^2},\quad y' = \frac{a(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2}.$$

Schreiben wir in dem Ausdrucke der ersten Differentialquotienten statt des Nenners wieder seinen Werth p, so erhalten wir

$$\frac{d^2p}{dz'^2} = \frac{(a^2+b^2+1)p^2+[a(az'+\alpha)+b(bz'+\beta)+z'-z'']^2}{p^3},$$

$$\frac{d^2p}{dz'dz''} = -\frac{p^2+(z''-z')[a(az'+\alpha)+b(bz'+\beta)+z'-z'']}{p^3},$$

$$\frac{d^2p}{dz''^2} = \frac{p^2-(z''-z')^2}{p^3}.$$

Für unsere zwei gefundenen Punkte ist aber $z' = z''$,

$a(az'+\alpha)+b(bz'+\beta)+z'-z''=0$, daher $A=\frac{a^2+b^2+1}{p}$,

$B=-\frac{1}{p}$, $C=\frac{1}{p}$; es ist also A und C positiv, und

$$C-\frac{B^2}{A}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p(a^2+b^2+1)}=\frac{a^2+b^2}{p(a^2+b^2+1)}$$

gleichfalls positiv; die gefundenen Werthe entsprechen also einem minimum der Entfernung p, und dieses minimum ist

$$=\frac{a\beta-b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nun ist aber $z' = z''$; die kürzeste Entfernung ist also der Ebene XY parallel, also senkrecht auf die Axe Z, d. h., auf die eine Linie A. Wenn wir, statt A als Axe der Z anzunehmen, B als solche angenommen hätten, so würden wir auf dieselbe Weise bewiesen haben, daß die kürzeste Entfernung auch auf B senkrecht ist; die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien ist also auf eine jede derselben senkrecht.

§. 83.

Es ist in dem Dreiecke ABC (Fig. 16.) ein Punkt O so zu bestimmen, daß die Summe der drei Entfernungen OA + OC + OB ein minimum sey.

Es sey $AB = a'$; fällen wir von C auf AB die Senkrechte $CF = b$; es sey $AF = a$; fällen wir von O

auf AB die Senkrechte OE = y; es sey AE = x, AO = t, OC = u, OB = v, und die Summe der drei Entfernungen = z; fällen wir von O auf CF die Senkrechte OD = x − a, so ist CD = b − y; es ist BE = a′ − x.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken AOE, CDO, OBE folgt $t = \sqrt{x^2+y^2}$, $u = \sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2}$, $v = \sqrt{(a'-x)^2+y^2}$, es ist also $z = t+u+v = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2} + \sqrt{(a'-x)^2+y^2}$; für das maximum oder minimum von z ist also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{t} + \frac{x-a}{u} - \frac{a'-x}{v} = o,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{t} - \frac{b-y}{u} + \frac{y}{v} = o.$$

Es ist

$$\frac{x}{t} = \frac{AE}{AO} = \cos. OAE, \quad \frac{y}{t} = \frac{OE}{AO} = \sin. OAE,$$

$$\frac{x-a}{u} = \frac{OD}{CO} = \cos. COD, \quad \frac{b-y}{u} = \frac{CD}{CO} = \sin. COD,$$

$$\frac{a'-x}{v} = \frac{BE}{BO} = \cos. OBE, \quad \frac{y}{v} = \frac{OE}{OB} = \sin. OBE;$$

die beiden vorigen Gleichungen sind also gleichbedeutend mit

$$\cos. OAE + \cos. COD - \cos. OBE = o,$$
$$\sin. OAE - \sin. COD + \sin. OBE = o;$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\cos. OAE - \cos. OBE = -\cos. COD,$$
$$\sin. OAE + \sin. OBE = \sin. COD;$$

addiren wir die Quadrate dieser beiden Gleichungen, und bemerken wir, daß

$$\cos. OAE^2 + \sin. OAE^2 = \cos. OBE^2 + \sin. OBE^2 = \cos. COD^2 + \sin. COD^2 = 1,$$

und $\cos. OAE \cos. OBE - \sin. OAE \sin. OBE = \cos. (OAE + OBE)$,

so ist

$$1 - 2\cos. (OAE + OBE) + 1 = 1, \cos. (OAE + OBE) = \tfrac{1}{2},$$

daher OAE + OBE = 60°, folglich AOB = 180° — OAE — OBE = 120°. Aus den beiden obigen Gleichungen folgt gleichfalls

$$\cos. OAE + \cos. COD = \cos. OBE,$$
$$\sin. OAE - \sin. COD = -\sin. OBE;$$

addiren wir die Quadrate dieser beiden Gleichungen, und bemerken wir, daß $\cos. OAE \cos. COD - \sin. OAE \sin. COD = \cos.(OAE + COD) = \cos.(DOA + COD) = \cos. COA$, so erhalten wir $1 + 2\cos. COA + 1 = 1$, daher $\cos. COA = -\frac{1}{2}$, folglich $COA = 120°$; es ist also $COB = 360° - COA - AOB = 120°$; die drei Winkel AOB, AOC, COB sind also gleich.

Differentiiren wir die ersten Differentialquotienten abermals, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y^2}{t^3} + \frac{(y-b)^2}{u^3} + \frac{y^2}{v^3} = A,$$

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = -\frac{xy}{t^3} - \frac{(x-a)(y-b)}{u^3} - \frac{(x-a')y}{v^3} = B,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{x^2}{t^3} + \frac{(x-a)^2}{u^3} + \frac{(a'-x)^2}{v^3} = C.$$

Da t, u und v nothwendig positiv sind, so sind A und C auch positiv; die gefundenen Werthe werden also einem minimum entsprechen, wenn $C - \frac{B^2}{A}$ positiv, d. i., C größer als $\frac{B^2}{A}$, folglich $AC > B^2$ ist; es muß also

$$\left(\frac{y^2}{t^3} + \frac{(y-b)^2}{u^3} + \frac{y^2}{v^3}\right)\left(\frac{x^2}{t^3} + \frac{(x-a)^2}{u^3} + \frac{(x-a')^2}{v^3}\right) > \left(\frac{xy}{t^3} + \frac{(x-a)(y-b)}{u^3} + \frac{(x-a')y}{v^3}\right)^2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{y^2(x-a)^2 + x^2(y-b)^2}{u^3 t^3} + \frac{y^2(x-a')^2 + y^2 x^2}{t^3 v^3} + \frac{(y-b)^2(x-a')^2 + y^2(x-a)^2}{u^3 v^3} > \frac{2xy(x-a)(y-b)}{t^3 u^3} + \frac{2xy(x-a')y}{t^3 v^3} + \frac{2(x-a)(y-b)(x-a')y}{u^3 v^3}$$ seyn.

Nun ist aber $[y(x-a)+x(y-b)]^2$ immer $> o$, daher $y^2(x-a)^2+x^2(y-b)^2 > 2xy(x-a)(y-b)$; folglich $\frac{y^2(x-a)^2+x^2(y-b)^2}{t^3 u^3} > \frac{2xy(x-a)(y-b)}{t^3 u^3}$; da wir nun dasselbe für die Theilsätze beweisen, deren Nenner $t^3 v^3$ und $u^3 v^3$ sind, so folgt daraus, daß $C - \frac{B^2}{A}$ wirklich positiv, also z ein minimum ist.

Da die geometrische Construktion dieser Auflösung nach der Pothenot'schen Aufgabe erfolgt, welche ich hier wohl als bekannt voraussetzen kann (s., z. B., das Lehrbuch der reinen Mathematik von Schmidt, Seite 258), so wollen wir uns hierbei nicht länger verweilen.

Von der Anwendung der Rechnung mit partialen Differentialen auf die Lehre von den krummen Flächen, und den krummen Linien mit doppelter Krümmung.

§. 84.

Aus der analytischen Geometrie setze ich als bekannt voraus, daß eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten x, y, z, bezogen auf die drei Coordinatenpläne YZ, XZ, und XY den Lauf einer krummen Fläche vorstellt; in der Folge werden wir immer annehmen, daß diese Ebenen, folglich auch ihre Durchschnitte, nämlich die Axen X, Y und Z, rechtwinklig gegen einander sind.

In dieser Gleichung können wir die Werthe zweier Coordinaten, z. B., x und y, willkürlich annehmen; sobald wir aber zweien Coordinaten bestimmte Werthe beigelegt haben, indem wir, z. B., $x = a$ und $y = b$ setzen, so sind durch die Gleichung der krummen Fläche die entsprechenden Werthe der dritten Coordinate z bestimmt. Wenn wir also in der Ebene XY einen Punkt, dessen Coordinaten $x = a$ und $y = b$ sind, annehmen, so bestimmen wir

vermittelst der aus der Gleichung der krummen Fläche gezogenen Werthe von z, in welcher senkrechten Entfernung der entsprechende Punkt der krummen Fläche ober- oder unterhalb des in der Ebene XY angenommenen Punktes, je nachdem das Zeichen von z positiv oder negativ ist, sich befindet.

Wenn wir von einem Punkte der krummen Fläche im allgemeinen zu einem unendlich nahe dabei gelegenen übergehen, so haben wir anzunehmen, daß zugleich x sich in $x + dx$ und y sich in $y + dy$ verwandle; wir erhalten dann durch die Differentiation der Gleichung der krummen Fläche die verschwindend kleine Änderung von z,

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = p\,dx + q\,dy,$$

indem wir die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ durch p und q vorstellen.

In dieser Gleichung sind im allgemeinen dx und dy unabhängig von einander, wie wir §. 76. gesehen haben.

Es sey $z = AB$ (Fig. 17, a) die Ordinate eines Punktes der krummen Fläche. Wenn nur x sich um $BC = dx$ ändert, so haben die beiden Punkte B und C dasselbe y, die Ebene ABC ist also XZ parallel; die Ordinate EC, welche y und $x + dx$ entspricht, liegt in dieser Ebene, und die verschwindend kleine Differenz $EC - AB = p\,dx$. Wenn nur y sich um $DB = dy$ ändert, so haben die beiden Punkte B und D dasselbe x; die Ebene ABD ist also YZ parallel, und die Ordinate DF, welche x und $y + dy$ entspricht, liegt in dieser Ebene; die verschwindend kleine Differenz $DF - AB = q\,dy$.

Es sey im allgemeinen die Gleichung einer durch AB gehenden, also auf XY senkrechten Ebene $y = mx + n$, welche die krumme Fläche nach der krummen Linie AG schneidet. Indem wir jetzt die Differenz zweier unendlich wenig von einander verschiedenen in dieser Ebene liegenden Ordinaten AB und IH suchen, so bemerken wir, daß in

diesem Falle dx und dy nicht mehr unabhängig von einander, sondern durch die Gleichung $dy = m\,dx$ verbunden sind; setzen wir diesen Werth in den allgemeinen Ausdruck von dz, so erhalten wir die verschwindend kleine Differenz der beiden Ordinaten IH und $AB = p\,dx + q\,m\,dx$ $= (p + q\,m)\,dx = \frac{p}{m}dy + q\,dy = \left(\frac{p}{m} + q\right) dy$. Dieses $\frac{dy}{dx} = m$ ist die Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie BH mit der Axe X, also die Ebene ABHI mit XZ bildet.

§. 85.

Zwei krumme Flächen, deren Gleichungen $f(x,y,z) = o$, $F(x, y, z) = o$ sind, schneiden sich im allgemeinen nach einer krummen Linie mit doppelter Krümmung, deren Gleichungen die Gleichungen dieser beiden krummen Flächen sind. Wenn wir der Coordinate x einen bestimmten Werth geben, so erhalten wir aus diesen Gleichungen durch Elimination die entsprechenden bestimmten Werthe der Coordinaten z und y; wenn also x sich in $x + dx$ verwandelt, so verwandeln sich dadurch zugleich y in $y + dy$ und z in $z + dz$; die Coordinaten x und y, daher auch ihre Differentialen dx und dy, sind also gegenwärtig nicht mehr unabhängig von einander.

Angenommen, daß wir durch Differentiation aus der Gleichung der ersten krummen Fläche $dz = p\,dx + q\,dy$, und aus der Gleichung der zweiten krummen Fläche $dz = P\,dx + Q\,dy$ ziehen; da nun für einen Punkt der krummen Linie mit doppelter Krümmung das x, y und z, daher auch das dx, dy und dz in diesen beiden Gleichungen dasselbe ist, so ist $p\,dx + q\,dy = P\,dx + Q\,dy = dz$, daher $-\,dx\,(p - P) = dy\,(q - Q)$, folglich $dz = p\,dx + q\,dy = p\,dx - \frac{p-P}{q-Q}q\,dx = \frac{qP - pQ}{q-Q}dx = \frac{pQ - qP}{p-P}dy$.

§. 86.

Es sey eine krumme Fläche durch ihre Gleichung zwischen x, y, z und beständigen Größen gegeben; es erhalte x den Zuwachs c, und y den Zuwachs h; stellen wir den Werth, welchen dadurch z erhält, durch z′ vor; es seyen, um abzukürzen, die aus der Gleichung der krummen Fläche gezogenen Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = p, \frac{dz}{dy} = q, \frac{d^2z}{dx^2} = r, \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx} = s, \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

so ist $z' = z + pc + qh + \frac{1}{2}rc^2 + sch + \frac{1}{2}qh^2 + \ldots$

Es sey eine andere krumme Fläche durch ihre Gleichung zwischen u, v, w und beständigen Größen, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem, gegeben; es erhalte u den Zuwachs c, v den Zuwachs h; der Werth, welchen dadurch w erhält, sey durch w′ vorgestellt; angenommen nun, daß die beiden krummen Flächen einen Punkt gemeinschaftlich haben, daß also für diesen Punkt $x = u$, $y = v$, $z = w$, so entsprechen die beiden Ordinaten z′ und w′ denselben Coordinaten $x + c = u + c$, $y + h = v + h$; z′ und w′ liegen also in der Richtung einer nämlichen geraden Linie.

Setzen wir wieder die aus der Gleichung dieser zweiten krummen Fläche gezogenen Differentialquotienten $\frac{dw}{du} = P$, $\frac{dw}{dv} = Q$, $\frac{d^2w}{du^2} = R$, $\frac{d^2w}{du\,dv} = \frac{d^2w}{dv\,du} = S$, $\frac{d^2w}{dv^2} = T$, so ist $w' = w + Pc + Qh + \frac{1}{2}Rc^2 + Shc + \frac{1}{2}Th^2 + \ldots$; es ist also die Differenz der beiden Ordinaten $z' - w'$

$$= c(p - P) + h(q - Q) + \frac{c^2}{2}(r - R) + ch(s - S) + \frac{h^2}{2}(t - T) + \ldots$$

Nehmen wir c und h verschwindend klein an; wenn nun für einen den beiden krummen Flächen gemeinschaftlichen Punk $p = P$, $q = Q$, so ist die Differenz der beiden

Ordinaten, indem wir die Theilsätze, welche die dritte und höhere Dimensionen von c und h enthalten, vernachlässigen, $z' - w' = \frac{c^2}{2}(r-R) + ch(s-S) + \frac{h^2}{2}(t-T)$, also verschwindend klein von der zweiten Ordnung; in diesem Falle sagt man, daß in dem Punkte, welchen die krummen Flächen gemeinschaftlich haben, eine Berührung von der ersten Ordnung stattfinde; es ist dann nämlich die Differenz der beiden Ordinaten z' und w' unendlich Mal kleiner, als sie seyn würde, wenn nicht zugleich $P = p$ und $Q = q$ wäre, also die Theilsätze $(p - P)\,c$ und $(q - Q)\,h$ nicht wegfielen.

Wenn außer $P = p$ und $Q = q$ noch $R = r$, $S = s$, $T = t$, so ist die Differenz der beiden Ordinaten

$$z' - w' = \frac{c^2}{2.3}\left(\frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{d^3 w}{du^3}\right) + \ldots,$$

also verschwindend klein von der dritten Ordnung; in diesem Falle sagt man, daß in dem Punkte, welchen die beiden krummen Flächen gemeinschaftlich haben, eine Berührung von der zweiten Ordnung stattfinde; es ist dann nämlich die Differenz der beiden Ordinaten z' und w' unendlich Mal kleiner, als sie seyn würde, wenn die zweiten Differentialquotienten nicht gleich wären, also die Theilsätze der Differenz, welche verschwindend klein von der zweiten Ordnung sind, nicht wegfielen.

Eben so sagt man, daß eine Berührung von der dritten Ordnung zwischen den beiden krummen Flächen stattfinde, wenn außerdem noch die aus ihren Gleichungen gezogenen dritten Differentialquotienten gleich sind, u. s. w.

§. 87.

Die allgemeine Gleichung einer Ebene läßt sich so anschreiben: $w = av + bu + c$. Damit diese Ebene mit einer krummen Fläche, deren Gleichung zwischen x, y und z gegeben ist, einen Punkt gemeinschaftlich habe, so muß für

diesen Punkt $w = z$, $v = y$, $u = x$ seyn; es ist also $z = ax + by + c$.

Damit ferner zwischen der Ebene und der krummen Fläche eine Berührung von der ersten Ordnung stattfinde, so müssen die aus der Gleichung jener hergeleiteten Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = a$, $\frac{dz}{dy} = b$ mit den aus der Gleichung dieser hergeleiteten Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ übereinstimmen, es ist also $a = p$, $b = q$, daher die Gleichung der berührenden Ebene $z = px + qy + c$. Es seyen x', y', z' die Coordinaten irgend eines andern Punktes dieser Ebene, so ist eben so $z' = px' + qy' + c$; ziehen wir von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so ist $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$.

Es sey V der Winkel, welchen diese Ebene mit dem Coordinatenplane XY bildet, so ist (s. meine analytische Geometrie, zweiter Theil, S. 24) $\cos. V = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$. Wenn die berührende Ebene der Ebene XY parallel ist, so ist der Winkel $V = o$, daher $\cos V = 1$, $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 1$, $1 + p^2 + q^2 = 1$, $p^2 + q^2 = o$, folglich sowohl $p = o$, als $q = o$.

Die Gleichungen der Normale, d. h., einer durch den Berührungspunkt auf die berührende Ebene erhobenen Senkrechten, sind also, wenn wir durch x'', y'', z'' die Coordinaten irgend eines Punktes derselben vorstellen (s. meine analytische Geometrie, zweiter Theil, S. 17) $x'' - x + p(z'' - z) = o$, $y'' - y + q(z'' - z) = o$.

Eine beliebig durch die Normale geführte Ebene nennt man eine normale Ebene.

Beispiel. Die Gleichung der Ellipsoide ist, wenn $2a$, $2b$ und $2c$ ihre Axen sind,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2;$$

es ist also gegenwärtig

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x}{a^2 z},\quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

setzen wir diese Werthe, so erhalten wir die Gleichung der berührenden Ebene:

$$z' - z = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(x' - x) - \frac{c^2 y}{b^2 z}(y' - y),$$

$$a^2 b z^2 (z' - z) = -b^2 c^2 x (x' - x) - a^2 c^2 y (y' - y),$$

$$b^2 c^2 x x' + a^2 c^2 y y' + a^2 b^2 z z' = b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Es sind ferner die Gleichungen der Normale

$$x'' - x = \frac{c^2 x}{a^2 z}(z'' - z),\quad y'' - y = \frac{c^2 y}{b^2 z}(z'' - z).$$

§. 88.

Es seyen x, y, z die Coordinaten eines Punktes einer krummen Fläche, deren Gleichung gegeben ist; dieser Punkt sey der Mittelpunkt einer Kugelfläche, deren allgemeine Coordinaten wir durch x′, y′, z′ vorstellen wollen, und deren Halbmesser = ϱ sey, so ist die Gleichung derselben

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \varrho^2 \quad \ldots \quad (1)$$

Die Gleichungen der Normale, welche durch denselben Punkt der krummen Fläche geht, und die Kugel in dem Punkte, dessen Coordinaten x′, y′, z′ sind, schneidet, sind (§. 87.)

$$x - x' + p(z - z') = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$y - y' + q(z - z') = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Denken wir uns nun eine Normale, welche durch einen dem vorigen unendlich nahe liegenden Punkt der krummen Fläche geht, und die Kugel in demselben Punkte, dessen Coordinaten x′, y′, z′ sind, schneidet, so erhalten wir deren Gleichungen, indem wir annehmen, daß in den Gleichungen 2 und 3 sich x in x + dx, y in y + dy, z in z + dz, p in p + dp, q in q + dq verwandeln, dagegen x′, y′, z′ ungeändert bleiben; da nun dz = p dx + q dy,

$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy = r\,dx + s\,dy$, $dq = \frac{dq}{dx} dx + \frac{dq}{dy} dy = s\,dx + t\,dy$ (es ist nämlich $\frac{dp}{dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$; da nun (§. 77.) $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$, so ist $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$), so erhalten wir durch die Differentiation der Gleichungen 2 und 3 die Gleichungen dieser zweiten Normale

$$dx + p^2\,dx + pq\,dy + (r\,dx + s\,dy)(z - z') = 0 \ldots\ldots (a)$$

$$dy + pq\,dx + q^2\,dy + (s\,dx + t\,dy)(z - z') = 0 \ldots\ldots (b).$$

Wenn wir uns durch den ursprünglichen und den unendlich nahe dabei gelegenen Punkt der krummen Fläche eine auf XY senkrecht geführte Ebene denken, so ist $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels, welchen diese mit der Ebene XZ bildet. Aus den beiden vorigen Gleichungen folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + p^2 + r(z - z')}{pq + s(z - z')} = -\frac{pq + s(z - z')}{1 + q^2 + t\,(z - z')},$$

daher, nach den gehörigen Reduktionen

$$1 + p^2 + q^2 + [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t](z - z') + (rt - s^2)(z - z')^2 = 0 \ldots\ldots (4).$$

Aus denselben Gleichungen folgt

$$z - z' = -\frac{dx(1 + p^2) + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = -\frac{dy(1 + q^2) + pq\,dx}{s\,dx + t\,dy},$$

daher nach den gehörigen Reduktionen

$$[s(1 + q^2) - pqt]\frac{dy^2}{dx^2} + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\frac{dy}{dx} - (1 + p^2)\,s + pqr = 0 \ldots\ldots (5).$$

Die Gleichungen 2, 3 und 4 bestimmen die Coordinaten x', y', z' des Punktes, in welchem die beiden Normalen sich schneiden, wenn man die Coordinaten x, y, z des ursprünglichen Punktes der krummen Fläche als gegeben annimmt.

In der Gleichung 5 kommen jene drei Coordinaten nicht mehr vor; sie ist in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ von dem zweiten Grade; da nun derselben Genüge geschehen muß, damit die Gleichung 4 stattfinde, und da aus derselben nur zwei bestimmte Werthe von $\frac{dy}{dx}$ erfolgen, so erkennen wir, daß wir von einem Punkte einer krummen Fläche nur nach zwei Richtungen hin zu unendlich nahe dabei liegenden Punkten gelangen können, welche der Bedingniß Genüge leisten, daß die durch dieselben geführten Normalen die durch jenen Punkt geführte schneiden.

§. 89.

Aus der Gleichung 5 des vorigen §. erhalten wir also die Tangenten $\frac{dy}{dx}$ der Winkel, welche die Projektionen dieser beiden Richtungen auf die Ebene XY mit der Axe X bilden. Wenn wir uns nach einer andern Richtung hin einen dem ursprünglichen unendlich nahe liegenden Punkt denken, so werden die durch diese beiden Punkte geführten Normalen sich nicht schneiden, d. h., nicht in einerlei Ebene liegen, weil dann der Gleichung 5 nicht Genüge geleistet wird, mithin die beiden Gleichungen, aus welchen dieselbe abgeleitet ist, nicht gleichzeitig stattfinden können.

Um den Winkel zu bestimmen, welchen diese beiden Richtungen mit einander bilden, so wollen wir die Gleichung 5 unter eine einfachere Gestalt bringen. Wir denken uns daher das Coordinatensystem so geändert, daß die Ebene XY der die krumme Fläche in dem ursprünglichen Punkte berührenden Ebene parallel werde, es ist dann (§. 87.) $p = o$, $q = o$; diese Gleichung verwandelt sich also in

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = o;$$

aus derselben ist nun leicht zu erkennen:

1) Die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ sind immer reell, weil der bekannte Theilsatz — 1 des ersten Gliedes dieser Gleichung negativ ist; durch einen gegebenen Punkt kann man also immer nach 2, aber nicht nach mehr Richtungen (wenn nämlich die Gleichung 5 nicht identisch ist) zu unendlich nahe liegenden Punkten gelangen, in welchen die Normalen die durch den ursprünglichen Punkt geführte schneiden.

2) Es seyen m' und m'' die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ so ist $m' m'' = -1$, $m' m'' + 1 = 0$, die Projektionen der beiden Richtungen auf die Ebne XY sind also senkrecht auf einander; diese Projektionen sind aber gegenwärtig den Richtungen parallel, es sind also diese beiden Richtungen senkrecht auf einander.

§. 90.

Setzen wir den Werth m' von $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung a oder b, so erhalten wir den entsprechenden Werth von z', und sodann vermittelst der Gleichungen 2 und 3 von x' und y', also die Coordinaten des Punktes, in welchem die eine dieser beiden Normalen die durch den ursprünglichen Punkt geführte schneidet; eben so erhalten wir, indem wir statt $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth m'' in die Gleichung a oder b substituiren, die entsprechenden Werthe der Coordinaten x', y', z' des Punktes, in welchem die andere dieser beiden Normalen die durch den ursprünglichen Punkt geführte schneidet. Substituiren wir sodann nach und nach ein jedes dieser beiden Systeme von Werthen von x', y', z' in die Gleichung 1, so erhalten wir den entsprechenden Werth von ϱ.

Denken wir uns nun die Kugelfläche geführt, deren Mittelpunkt der erste Durchschnittspunkt, und deren Halbmesser der erste Werth von ϱ ist, so werden diese beiden Normalen der krummen Fläche auch Normalen der Kugel-

fläche seyn; die Kugelfläche hat also in der Richtung des unendlich kleinen Bogens, welcher durch diese unendlich nahe bei einander liegenden Punkte geht, gleiche Krümmung mit der krummen Fläche, und ihr Halbmesser wird der Krümmungshalbmesser dieses Bogens seyn.

Denken wir uns eben so die Kugelfläche geführt, deren Mittelpunkt der zweite dieser Durchschnittspunkte, und deren Halbmesser der zweite Werth von ϱ ist, so hat diese Kugel den Bogen, welcher durch den ursprünglichen Punkt, und durch den unendlich nahe dabei in einer Richtung, senkrecht auf die vorige, liegenden Punkt geht, mit der krummen Fläche gemeinschaftlich; beide krumme Flächen haben also in der Richtung dieses unendlich kleinen Bogens gleiche Krümmung, und der Halbmesser der Kugel ist der Krümmungshalbmesser dieses unendlich kleinen Bogens.

§. 91.

Unter einer developpabeln Fläche versteht man eine dergestalt eine Reihefolge von geraden Linien enthaltende krumme Fläche, daß, wenn man dieselbe als vollkommen biegsam und undehnbar annimmt, man sie ohne Trennung oder Aufeinanderlegung ihrer Theile auf einer Ebene ausbreiten kann.

In dem vorigen §. haben wir gesehen, daß eine jede Normale einer krummen Fläche von zwei unendlich wenig von ihr verschiedenen Normalen geschnitten wird, welche in zwei gegen einander senkrechten normalen Ebenen liegen.

Denken wir uns die durch einen Punkt der krummen Fläche gehende Normale, geschnitten durch die eine dieser beiden unendlich wenig von ihr verschiedenen Normalen; diese zweite Normale wird wieder nach derselben Richtung hin von einer dritten, diese wieder nach derselben Richtung hin von einer vierten, u. s. w., geschnitten. Die Gesammtheit der Punkte, in welchen diese Normalen die krumme Fläche schneiden, liegen auf einer Krümmungslinie derselben, welche in dem allgemeineren Falle eine krumme Linie mit

doppelter Krümmung seyn wird. Die Gesammtheit dieser Normalen bildet eine auf die krumme Fläche senkrechte developpable Fläche; diese Fläche ist nämlich eine developpable, weil je zwei auf einander folgende Normalen sich schneiden, und eine dritte folgende sich auf die Ebene der beiden vorhergehenden dergestalt umbiegen läßt, daß sie mit der sie schneidenden immer noch denselben Winkel bildet; auf dieselbe Weise verhält es sich mit den folgenden Normalen.

Gehen wir von der zuerst betrachteten Normale zu der andern mit ihr in einerlei Ebene liegenden über, sodann von dieser zweiten Normalen in derselben Richtung hin zu einer dritten, von dieser dritten Normale in derselben Richtung hin zu einer vierten, u. s. w., so schneiden diese Normalen die krumme Fläche nach einer krummen Linie, welche die zweite Krümmungslinie derselben seyn wird; die unendlich kleinen Bögen dieser krummen Linien bei dem zuerst betrachteten Punkte sind senkrecht auf einander. Die Gesammtheit dieser Normalen liegt auf einer zweiten der krummen Fläche senkrechten developpablen Fläche.

Analog mit der ersten können wir uns auf der krummen Fläche nach derselben Richtung hin eine Reihefolge von anderen Krümmungslinien verzeichnet denken, von welchen immer die folgende von der vorhergehenden unendlich wenig abstehe. Analog mit der zweiten können wir uns auf der krummen Fläche eine Reihefolge von Krümmungslinien verzeichnet denken, von welchen immer die folgende von der vorhergehenden unendlich wenig abstehe. Aus dem Obigen folgt, daß eine jede der ersten Krümmungslinien eine jede der zweiten Krümmungslinien unter einem rechten Winkel schneidet; es theilen also diese beiden Systeme von Krümmungslinien die krumme Fläche in eine unendliche Anzahl von Rechtecken, welche unendlich klein nach ihren beiden Dimensionen sind.

Als Beispiel wollen wir eine durch die Umdrehung einer krummen Linie um eine feste Axe entstehende Umdrehungsfläche betrachten; einen Durchschnitt derselben nach einer

durch die Axe gehenden Ebene nennen wir einen Meridian, und einen Durchschnitt senkrecht auf die Axe, welcher immer ein Kreis ist, nennen wir eine Parallele. Denken wir uns eine durch einen beliebig auf der krummen Fläche angenommenen Punkt geführte Normale, denken wir uns einen andern unendlich nahe dabei auf dem Meridian des vorigen liegenden Punkt, und die durch denselben geführte Normale, so werden diese beiden Normalen der krummen Fläche einander schneiden, weil sie zugleich Normalen des Meridians, einer krummen Linie mit einfacher Krümmung sind.

Denken wir uns eben so einen unendlich wenig von dem ursprünglichen entfernten, und auf seiner Parallele liegenden Punkt, und die durch denselben der krummen Fläche geführte Normale, so wird diese die durch den ursprünglichen Punkt der krummen Fläche geführte Normale gleichfalls schneiden, weil beide Normalen die Axe in einem nämlichen Punkte schneiden. Wenn wir durch einen andern nach einer andern Richtung hin unendlich nahe bei dem ursprünglichen angenommenen Punkt der krummen Fläche eine Normale führen, so wird diese die durch den ursprünglichen Punkt geführte nicht schneiden, weil beide Normalen in verschiedenen Meridianen liegen, und die Axe nicht in demselben Punkte schneiden, also auch nicht in einerlei Ebene liegen können. Die Krümmungslinien einer Umdrehungsfläche nach der einen Richtung sind also ihre Meridiane, und nach der andern Richtung ihre Parallelen.

Nur in dem speziellen Falle, wo die Umdrehungsfläche eine Kugel ist, schneiden sich alle Normalen derselben in einem nämlichen Punkte, dem Mittelpunkte, weil ein jeder Durchmesser zugleich die Axe der Kugel ist.

§. 92.

Die Gleichung 5, in welcher die Coordinaten x', y', z' des Mittelpunktes der Krümmungskugel nicht vorkommen, ist eine Gleichung zwischen dx, dy, und den Coordinaten x, y, z, oder vielmehr x, y, weil wir uns aus der Glei-

chung der krummen Fläche statt z seinen durch eine Funktion von x und y ausgedrückten Werth substituirt denken können; sie ist also die allgemeine Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungslinien auf die Ebene XY; jetzt sind wir noch nicht im Stande, hieraus die entsprechende ursprüngliche Gleichung zwischen x und y abzuleiten.

Wir haben §. 91. gesehen, daß einer jeden Krümmungslinie eine developpable Fläche entspricht, welche die durch sämmtliche Punkte der Krümmungslinie der krummen Fläche geführten Normalen enthält; die auf einander folgenden Durchschnittspunkte dieser Normalen liegen auf einer krummen Linie, welche als die Entwickelte der Krümmungslinie zu betrachten ist; man kann diese Linie die Kehrlinie der developpablen Fläche nennen; denn, da die Normalen derselben tangent sind, so dreht ihnen die Kehrlinie auf allen Seiten ihre konvexe Seite zu; die developpable Fläche kann sich also nicht auf der andern Seite der Kehrlinie erstrecken. Denken wir uns auf diese Weise sämmtliche Kehrlinien der Krümmungslinien nach der einen Richtung verzeichnet, so liegen diese auf einer krummen Fläche, welche die Mittelpunkte der Krümmung nach der einen Richtung hin der ursprünglichen krummen Fläche enthält. Denken wir uns auf dieselbe Weise die Kehrlinien der Krümmungslinien nach der andern Richtung hin verzeichnet, so liegen diese auf einer krummen Fläche, welche die Mittelpunkte der Krümmung der ursprünglichen krummen Fläche nach der andern Richtung hin enthält.

Aus den Gleichungen 2, 3, 4 erhalten wir, wenn wir die Coordinaten x, y, z eines Punktes der krummen Fläche als gegeben ansehen, die Werthe der Coordinaten der Mittelpunkte der beiden entsprechenden Krümmungskugeln. Wenn wir also zwischen diesen drei Gleichungen und der Gleichung der krummen Fläche x, y, z eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur noch die Coordinaten x', y', z' vorkommen; es ist also dieses die Gleichung der die Mittelpunkte der Krümmung enthaltenden krummen Fläche.

Wenn nun diese Gleichung in das Produkt zweier Faktoren, wovon ein jeder $= o$, aufgelöst werden kann, so gehört die eine Gleichung der krummen Fläche an, welche die Mittelpunkte der Krümmung nach der einen Richtung, und die andere Gleichung der krummen Fläche an, welche die Mittelpunkte der Krümmung nach der andern Richtung hin enthält. Wenn aber diese Gleichung nicht in das Produkt zweier Faktoren, von welchen ein jeder $= o$, aufgelöst werden kann, so sind die beiden krummen Flächen, welche die Mittelpunkte der Krümmung nach den beiden Richtungen hin enthalten, die Äste einer einzigen krummen Fläche, welcher diese Gleichung angehört.

§. 93.

Es seyen $\varphi(x, y, z) = o$, $\psi(x, y, z) = o$ die Gleichungen zweier krummen Flächen, deren Durchschnitt die Linie mit doppelter Krümmung **MN** (Fig. 17. b) ist. Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen zuerst **y** eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt $F(x, z) = o$, welches die Gleichung eines Zylinders ist, dessen Elemente der Axe **Y** parallel sind, und auf welchem sich gleichfalls die krumme Linie mit doppelter Krümmung befindet; es ist dieses zugleich die Gleichung der Projektion **RS** derselben auf die Ebene **XZ**. Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen **z** eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt $f(x, y) = o$, welches die Gleichung eines Zylinders ist, dessen Elemente der Axe **Z** parallel sind, und auf welchem sich gleichfalls die krumme Linie mit doppelter Krümmung befindet; es ist dieses zugleich die Gleichung der Projektion **QP** derselben auf die Ebene **XY**.

Es sey **A** ein Punkt der krummen Linie mit doppelter Krümmung, dessen Coordinaten **x**, **y** und **z**, und dessen Projektionen auf **XY** und **XZ**, **B** und **C** sind, so ist klar, daß die Projektionen der Tangente **AT** auf diese Ebene die Tangenten **BU** und **CV** der Projektionen der krummen Linie mit doppelter Krümmung sind; die Gleichung von **BU**

ist, wenn wir durch x″, y″ und z″ die Coordinaten des allgemeinen Punktes der Tangente vorstellen,

$$y - y'' = \frac{dy}{dx}(x - x''),$$

welches $\frac{dy}{dx}$ aus $f(x, z) = o$ zu ziehen ist; die Gleichung von CV ist $z - z'' = \frac{dz}{dx}(x - x'')$, welches $\frac{dz}{dx}$ aus $F(x, z) = o$ zu ziehen ist; die Gleichungen der Tangente AT sind also

$$y - y'' = \frac{dy}{dx}(x - x''),\ z - z'' = \frac{dz}{dx}(x - x'').$$

Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen und den beiden Gleichungen der krummen Linie x, y und z eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung zwischen den Coordinaten x″, y″ und z″ des allgemeinen Punktes sämmtlicher Tangenten der krummen Linie mit doppelter Krümmung; es ist dieses also die Gleichung einer developpablen Fläche, deren Kehrlinie die krumme Linie mit doppelter Krümmung ist. Wenn die krumme Linie nur einfach gekrümmt ist, so verwandelt sich die developpable Fläche in die Ebene dieser krummen Linie, die Gleichung zwischen x″, y″, z″ wird also nur von dem ersten Grade seyn. Wir erkennen also auf diese Weise, ob eine krumme Linie einfach oder doppelt gekrümmt ist.

§. 94.

Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Berührungspunkt und den allgemeinen Punkt der Tangente geht, ist von der Gestalt

$$A(x - x'') + B(y - y'') + C(z - z'') = o;$$

setzen wir statt $y - y''$ und $z - z''$ ihre Werthe, und dividiren wir sodann durch $x - x''$, so ist

$$A + B\frac{dy}{dx} + C\frac{dz}{dx} = o,\ 1 + \frac{B}{A}\frac{dy}{dx} + \frac{C}{A}\frac{dz}{dx} = o.$$

Wenn diese Ebene auch noch durch den unendlich nahe da-

bei gelegenen Punkt der krummen Linie mit doppelter Krümmung geht, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, so findet die vorige Gleichung auch noch statt, wenn wir annehmen, daß sich x in $x + dx$ verwandelt, wodurch dy sich in $dy + d^2y$, dz in $dz + d^2z$ verwandelt; setzen wir $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = P$, so findet also auch das Differential der Gleichung $1 + \frac{B}{A} p + \frac{C}{A} P = o$ statt; setzen wir $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dP}{dx} = Q$, so ist dieses Differential

$$\frac{B}{A} q + \frac{C}{A} Q = o;$$

es ist also $\frac{C}{A} = -\frac{q}{Q}\frac{B}{A}$, $1 + \frac{B}{A} p - \frac{q}{Q}\frac{B}{A} P = o$,

folglich $\frac{B}{A} = \frac{Q}{Pq - pQ}$, und $\frac{C}{A} = -\frac{q}{Pq - pQ}$;

es ist also die Gleichung der die krumme Linie mit doppelter Krümmung berührenden Ebene

$$x - x'' + \frac{Q}{Pq - pQ}(y - y'') - \frac{q}{Pq - pQ}(z - z'') = o,$$

$$(Pq - pQ)(x - x'') + Q(y - y'') - q(z - z'') = o.$$

§. 95.

Durch den Berührungspunkt lassen sich unendlich viele Senkrechte auf die Tangente, also unendlich viele Normalen der krummen Linie mit doppelter Krümmung führen; alle diese Normalen liegen in einer nämlichen Ebene, welche man die normale Ebene nennt. Es seyen wieder x, y und z die Coordinaten des Berührungspunktes; x', y', z' die Coordinaten des allgemeinen Punktes der normalen Ebene, so ist deren Gleichung (s. meine analytische Geometrie; 2ter Theil, Seite 17)

$$x - x' + \frac{dz}{dx}(z - z') + \frac{dy}{dx}(y - y') = o,$$

$$x - x' + P(z - z') + p(y - y') = 0;$$

indem wir wieder $\frac{dz}{dx} = P$, $\frac{dy}{dx} = p$ setzen.

Es sey **AB** (Fig. 18.) der verschwindend kleine Bogen, welchen die Tangente mit der krummen Linie gemeinschaftlich hat, und welcher mit seiner Sehne zusammenfallend anzunehmen ist, **FHIG** die normale Ebene, welche auf **AB** senkrecht ist, und durch die Mitte dieser Linie geht, und deren Gleichung ist

$$x - x' + P(z - z') + p(y - y') = 0 \ldots (1)$$

Es sey **BC** der folgende verschwindend kleine Bogen der krummen Linie, **LMIH** seine normale Ebene, welche die vorhergehende nach **HI** schneidet, x', y', z' seyen die allgemeinen Coordinaten dieser geraden Linie, so erhalten wir eine andere Gleichung, welche dieser geraden Linie angehört, indem wir nach dem Gesetze des Überganges von der ersten normalen Ebene zu der zweiten annehmen, daß x sich in $x + dx$, y sich in $y + dy$, und z sich in $z + dz$ verwandle, d. h., indem wir die Gleichung (1) differentiiren; es ist also

$$1 + \frac{dp}{dx}(y - y') + p\frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx}(z - z') + P\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$1 + p^2 + P^2 + q(y - y') + Q(z - z') = 0 \ldots (2),$$

indem wir die zweiten Differentialquotienten $\frac{dP}{dx} = Q$, $\frac{dp}{dx} = q$ setzen.

Denken wir uns eben so die normalen Ebenen **PQON**, **WVSR**, u. s. w., der folgenden Bögen **CD**, **DE**, u. s. w., geführt; es seyen **HI**, **NO**, **RS**, u. s. w., die auf einander folgenden Durchschnittslinien dieser Ebenen, **T**, **U**, u. s. w., die auf einander folgenden Durchschnittspunkte dieser Linien, so liegen diese geraden Linien auf einer developpablen Fläche, deren Kehrlinie die durch **T**, **U**, u. s. w., gehende krumme Linie ist.

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen $F(x, z) = o$, $f(x, y) = o$, und den Gleichungen 1 und 2 x, y und z eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung zwischen den Coordinaten x', y', z' des allgemeinen Punktes der Durchschnittslinien dieser Ebenen, es ist also dieses die Gleichung der developpablen Fläche.

§. 96.

Der Punkt **T**, in welchem sich die Durchschnittslinien **HI** und **NO** dreier auf einander folgender normalen Ebenen schneiden, ist gleichweit von den vier auf einander folgenden Punkten **A**, **B**, **C**, **D** der krummen Linie mit doppelter Krümmung entfernt; denn die geraden Linien, geführt von **T** nach den Mitten von **AB**, **BC** und **CD** stehen senkrecht auf diese Linie; es ist also **T** der Mittelpunkt der Kugel, welche durch **A**, **B**, **C** und **D** geht, und der Halbmesser dieser Kugel $= AT = BT = CT = DT$.

Es seyen nun x', y', z' die Coordinaten dieses den drei normalen Ebenen gemeinschaftlichen Punktes **T**; wir gelangen von der Gleichung der Ebene **LMIH** zu der Gleichung der Ebene **PQON**, indem wir annehmen, daß x sich abermals in $x + dx$ verwandelt, wodurch sich y in $y + dy$, z in $z + dz$, dy in $dy + d^2y$, dz in $dz + d^2z$, d^2y in $d^2y + d^3y$, d^2z in $d^2z + d^3z$ verwandeln; differentiiren wir also die Gleichung 2, so ist

$$2p\frac{dp}{dx} + 2P\frac{dP}{dx} + q\frac{dy}{dx} + Q\frac{dy}{dx} + \frac{dq}{dx}(y - y') + \frac{dQ}{dx}(z - z') = o,$$

$$3PQ + 3pq + r(y - y') + R(z - z') = o \ldots . (3),$$

indem wir die dritten Differentialquotienten $\frac{dQ}{dx} = R$, $\frac{dq}{dx} = r$ setzen.

Wenn wir zwischen den zwei Gleichungen $f(x, y) = o$, $F(x, z) = o$ und den Gleichungen 1, 2 und 3, x, y und z eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen zwischen x', y', z';

es sind dieses die Gleichungen der Kehrlinie TUU' .... Wenn ABCDE .... eine krumme Linie mit einfacher Krümmung ist, so ist TUU' .... auch eine krumme Linie mit einfacher Krümmung, nämlich die Entwickelte von ABCDE ....

Nehmen wir aus der Gleichung 3 den Werth von $y - y' = -\frac{3PQ + 3pq + R(z-z')}{r}$, und substituiren wir denselben in die Gleichung 2, so erhalten wir den

Werth von $z - z' = \frac{-r(1+P^2+p^2) + 3q(PQ+pq)}{rQ - Rq}$;

es ist also $y - y' = \frac{R(1+p^2+P^2) - 3Q(PQ+pq)}{rQ - Rq}$;

substituiren wir diese Werthe in die Gleichung 1, so erhalten wir

$$x - x' = \frac{(rP - Rp)(1+P^2+p^2) - 3(Pq - pQ)(PQ+pq)}{rQ - Rq}$$

$$= \frac{r'(1+p^2+P^2) - 3q'(PQ+pq)}{rQ - Rq},$$ indem wir, um abzukürzen, $rP - Rp = r'$, $Pq - pQ = p'$ setzen; es ist also das Quadrat des Halbmessers der Krümmungskugel in

$$A = AT^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$$= \frac{(r^2 + r'^2 + R^2)(1 + p^2 + P^2)^2}{(rQ - Rq)^2}$$

$$- \frac{6(rq + r'q' + RQ)(1 + p^2 + P^2)(PQ + pq)}{(rQ - Rq)^2}$$

$$+ \frac{9(q^2 + q'^2 + Q^2)(PQ + pq)^2}{(rQ - Rq)^2}.$$

Einleitung in die Integralrechnung.

§. 97.

Es sey $y = \frac{\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \ldots}{\alpha' x^n + \beta' x^{n-1} + \gamma' x^{n-2} + \ldots}$ eine rationale gebrochene Funktion von x. Wenn in dem Zähler

derselben der höchste Exponent von x größer ist, als in dem Nenner, so dividiren wir jenen durch diesen, und setzen die Division so lange fort, bis wir zu einem Reste gelangen, in welchem der höchste Exponent von x kleiner ist, als in dem Nenner; wenn nun der erhaltene Quotient im allgemeinen

$$px^{m-n} + qx^{m-n-1} + \ldots,$$

und der Rest

$$\alpha'' x^{n-1} + \beta'' x^{n-2} + \ldots,$$

so ist

$$y = px^{m-n} + qx^{m-n-1} + \ldots + \frac{\alpha'' x^{n-1} + \beta'' x^{n-2} + \ldots}{\alpha' x^n + \beta' x^{n-1} + \ldots}.$$

Dividiren wir den Zähler und den Nenner dieses Bruches durch α', und setzen wir größerer Einfachheit wegen

$\frac{\alpha''}{\alpha'} = R$, $\frac{\beta''}{\alpha'} = S$, ... $\frac{\beta'}{\alpha'} = R'$, $\frac{\gamma'}{\alpha'} = S'$, ..., so ist

$$y = px^{m-n} + qx^{m-n-1} + \ldots + \frac{Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + \ldots}{x^n + R'x^{n-1} + \ldots}$$

Sehen wir nun, auf welche Weise wir diesen Bruch in die Summe anderer Brüche dergestalt umwandeln, daß in den Nennern dieser Brüche x nur in der ersten Potenz vorkömmt.

Stellen wir die n Wurzeln der Gleichung, welche wir erhalten, indem wir die Nenner = o setzen, durch a, b, c, ...l vor, so ist, wie aus der Algebra bekannt ist,

$$x^n + R'x^{n-1} + S'x^{n-2} + \ldots = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l);$$

setzen wir nun

$$\frac{Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + Tx^{n-3} + \ldots}{x^n + R'x^{n-1} + S'x^{n-2} + \ldots}$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

und bestimmen wir die Werthe von A, B, C, ... L so, daß dieser Gleichung Genüge geschieht, x mag seyn, was es nur wolle.

Bringen wir in dem zweiten Gliede dieser Gleichung unter einerlei Benennung, so ist

$$\frac{Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + Tx^{n-3} + \ldots.}{x^n + R'x^{n-1} + S'x^{n-2} + \ldots.}$$
$$= \frac{A(x-b)(x-c)\ldots(x-l) + B(x-a)(x-c)\ldots(x-l) + \ldots + L(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.(x-l)}.$$

In dieser Gleichung sind die Nenner gleich, die Zähler sind also auch gleich; da nun eine jede der Größen A, B, C .... L durch $n-1$ Faktoren von dem ersten Grade in x multiplizirt ist, so erhalten wir nach vollzogener Multiplikation $Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + Tx^{n-3} + \ldots. + Z$ $= (A+B+C+\ldots+L)x^{n-1} - [A(b+c+\ldots+l) + B(a+c+\ldots+l) + \ldots + L(a+b+c)]x^{n-2} + \ldots \pm [Abc\ldots l + Bac\ldots l + Cab\ldots l + \ldots + Labc\ldots]$, wo in dem letzten Theile des zweiten Gliedes das obere Zeichen gilt, wenn $n-1$ gerade, dagegen das untere gilt, wenn $n-1$ ungerade ist.

Diese Gleichung muß wahr seyn, welches auch der Werth von x ist; dieses kann nur dadurch stattfinden, daß der Coeffizient einer Potenz von x in dem einen Gliede der Gleichung gleich ist dem Coeffizienten der gleichen Potenz von x in dem andern Gliede der Gleichung; setzen wir also auf beiden Seiten diese Coeffizienten gleich, so erhalten wir zur Bestimmung der n Größen A, B, C, ... L die n Gleichungen von dem ersten Grade

$$A+B+C+\ldots+L = R$$
$$A(b+c+\ldots l)+B(a+b+\ldots+l)+\ldots L(a+b+c+\ldots) = -S,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Abc\ldots l + Bac\ldots l + \ldots + Labc\ldots = \pm Z.$$

Beispiel. Es sey $\frac{Rx+S}{x^2-a^2}$ auf die angegebene Weise in die Summe zweier einfachen Brüche zu zerlegen. Da $x^2 - a^2 = (x-a)(x-a)$, so setzen wir

$$\frac{Rx+S}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a};$$

bringen wir in dem zweiten Gliede unter einerlei Benennung, und unterdrücken wir sodann den beiden Gliedern gemeinschaftlichen Nenner, so ist

$$Rx+S = A(x+a)+B(x-a) = (A+B)x - Ba + Aa;$$

setzen wir die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich, so ist $A+B=R$, $a(A-B)=S$, daher $B=\frac{aR-S}{2a}$, $A=\frac{aR+S}{2a}$; es ist also

$$\frac{Rx+S}{x^2-a^2}=\frac{aR+S}{2a(x-a)}+\frac{aR-S}{2a(x+a)}.$$

Es sey auf dieselbe Weise in die Summe dreier einfachen Brüche zu zerlegen der zusammengesetzte Bruch $\frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3}$. Die drei Wurzeln der Gleichung, welche entsteht, indem wir den Nenner $=0$ setzen, sind a, $2a$, $3a$; es ist also

$$x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3=(x-a)(x-2a)(x-3a);$$

setzen wir daher

$$\frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-2a}+\frac{C}{x-3a},$$

so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen

$$5x^2-7ax+11a^2$$
$$=A(x-2a)(x-3a)+B(x-a)(x-3a)+C(x-a)(x-2a)$$
$$=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)ax+(6A+3B+2C)a^2;$$

setzen wir auf beiden Seiten die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x gleich, so ist

$$A+B+C=5,\ 5A+4B+3C=7,\ 6A+3B+2C=11;$$

hieraus finden wir durch Elimination

$$A=\frac{9}{2},\ B=-17,\ C=\frac{35}{2};$$

es ist also

$$\frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11ax-6a^3}=\frac{9}{2(x-a)}-\frac{17}{x-2a}+\frac{35}{2(x-3a)}.$$

§. 98.

Wenn unter den Faktoren von dem ersten Grade in x des Nenners zwei oder mehrere gleich sind, so können wir die Zerlegung des zusammengesetzten Bruches in einfache Brüche nicht mehr auf die in dem vorigen §. angegebene Weise vornehmen.

Es sey, z. B., $\frac{x^2 + Rx + S}{(x-a)^2 (x-b)}$, die drei Faktoren von dem ersten Grade des Nenners also $x - a$, $x - a$ und $x - b$. Wenn wir

$$\frac{x^2 + Rx + S}{(x-a)^2 (x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

setzen wollen, so ist $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-a} = \frac{A+B}{x-a}$, und $A+B$ als eine einzige Größe zu betrachten; wenn wir nun die beiden Glieder der Gleichung unter einerlei Benennung bringen, und sodann die Zähler gleich setzen, so erhalten wir

$$x^2 + Rx + S = (A+B)(x-a)(x-b) + C(x-a)^2$$
$$= (A+B+C)x^2 - [(A+B)(a+b) + 2aC)]x + (A+B)ab + a^2C,$$

daher, indem wir auf beiden Seiten die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x gleich setzen, $A + B + C = 1$, $(A+B)(a+b) + 2aC = -R$, $(A+B)ab + a^2C = S$; wir erhalten also zwischen den zwei Größen $A+B$ und C drei Gleichungen, welchen im allgemeinen nicht Genüge geschehen kann, indem nach erfolgter Elimination von $A+B$ und C nur eine Gleichung zwischen bekannten Größen übrig bleibt.

Die Zerlegung nehmen wir gegenwärtig auf folgende Art vor.

Es sey $x - a$ m mal Faktor des Nenners, welcher ein Vielsatz von dem n ten Grade in x sey, und außerdem seyen in demselben noch die Faktoren $x-b$, $x-c$, $x-d$, ... enthalten; wenn unter diesen letztern gleichfalls gleiche Faktoren vorkommen, so nehmen wir in Bezug auf dieselben die nämliche Zerlegung vor, welche wir in Bezug auf $(x-a)^m$ vornehmen.

Der Zähler sey wie in dem vorigen §. vorgestellt; setzen wir nun

$$\frac{Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + Tx^{n-3} + ...}{(x-a)^m (x-b)(x-c)....} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{B}{(x-a)^{m-1}}$$
$$+ .... + \frac{L}{x-a} + \frac{M}{x-b} + \frac{N}{x-c} + ...$$

Bringen wir die Brüche des zweiten Gliedes der Gleichung unter einerlei Benennung, und unterdrücken wir sodann den beiden Gliedern der Gleichung gemeinschaftlichen Nenner, so ist $Rx^{n-1} + Sx^{n-2} + Tx^{n-3} + \ldots$

$= A(x-b)(x-c)\ldots + B(x-a)(x-b)(x-c)\ldots + \ldots$

$+ L(x-a)^{m-1}(x-b)(x-c)\ldots + M(x-a)^{m}(x-c)\ldots$

$+ N(x-a)^{m}(x-b)\ldots + \ldots$

Vollziehen wir die in dem zweiten Gliede der Gleichung angedeuteten Rechnungen, schreiben wir in den Theilsätzen desselben, welche von derselben Dimension in Bezug auf x sind, die Potenz von x als gemeinschaftlichen Faktor an, setzen wir sodann auf beiden Seiten die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x gleich, so erhalten wir zur Bestimmung der n Größen A, B, ... L, M, N .... n Gleichungen von dem ersten Grade.

Beispiel. Es sey $\frac{x^2 + px + q}{(x-a)^2(x-b)}$ auf die gegebene Weise umzuwandeln.

Setzen wir also

$$\frac{x^2 + px + q}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-a)} + \frac{C}{(x-b)},$$

bringen wir die Brüche des zweiten Gliedes unter einerlei Benennung, und unterdrücken wir sodann den beiden Gliedern gemeinschaftlichen Nenner, so ist

$x^2 + px + q = A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2$

$= (B+C)x^2 + [A-(a+b)B-2aC]x - Ab + Bab + a^2C;$

setzen wir jetzt die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich, so ist

$B + C = 1, A - (a+b)B - 2aC = p, Bab + a^2C - Ab = q;$

hieraus finden wir durch Elimination

$$A = \frac{a^2+ap+q}{a-b}, B = \frac{a^2-2ab-bp-q}{(a-b)^2}, C = \frac{b^2+bp+q}{(a-b)^2};$$

es ist also

$$\frac{x^2+px+q}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{a^2+ap+q}{(a-b)(x-a)^2} + \frac{a^2-2ab-bp-q}{(a-b)^2(x-a)}$$
$$+ \frac{b^2+bp+q}{(a-b)^2(x-b)}.$$

§. 99.

Es sey $\frac{M}{N}$ ein zusammengesetzter Bruch; es sey $x-a$ ein Faktor von dem ersten Grade des Nenners, und $N = (x-a)P$; $x-a$ sey nicht als Faktor in P enthalten; bestimmen wir nun den Zähler A direkt, welcher bei vorzunehmender Zerlegung des zusammengesetzten Bruches $x-a$ zum Nenner haben wird.

Setzen wir $\frac{M}{N} = \frac{A}{x-a} = \frac{Q}{P}$, so muß Q eine ganze Funktion von x seyn; denn Q ist die Summe der Zähler, welche wir erhalten, indem wir sämmtliche einfache Brüche, ausgenommen $\frac{A}{x-a}$, unter einerlei Benennung bringen.

Multipliziren wir diese Gleichung durch $N = (x-a)P$, so erhalten wir $M = AP + (x-a)Q$; es ist also $Q = \frac{M-AP}{x-a}$. Da nun Q eine ganze Funktion von x ist, so muß $M - AP$ durch $x - a$ ohne Rest theilbar seyn; es muß also, indem wir a statt x in die Funktionen M und P von x setzen, $M - AP = o$, daher $A = \frac{M}{P}$ seyn; stellen wir also durch m und p die bestimmten Werthe vor, welche M und P durch diese Substitution erhalten, so ist $A = \frac{m}{p}$.

Dieses Verfahren ist das einfachste, wenn $P = \frac{N}{x-a}$ direkt gegeben ist. Wenn jedoch P nicht direkt gegeben, sondern durch die vorzunehmende Division von N durch $x - a$ erst zu finden ist, so ist die Bestimmung des Wer-

thes von A auf dem folgenden Wege einfacher. Die vorige Gleichung können wir umändern in

$$A = \frac{M}{P} = \frac{M(x-a)}{P(x-a)} = \frac{M(x-a)}{N},$$

wo überall a statt x zu setzen ist.

Indem wir in $\frac{M(x-a)}{N}$ a statt x setzen, so verwandeln sich der Zähler und der Nenner dieses Bruches in Null, der Bruch verwandelt sich also in $\frac{0}{0}$; um nun seinen wahren Werth zu bestimmen, so dividiren wir (§. 50.) den Differentialquotienten des Zählers

$$= \frac{d\,[M(x-a)]}{dx} = M + (x-a)\,\frac{dM}{dx}$$

durch den Differentialquotienten $\frac{dN}{dx}$ des Nenners, und setzen sodann $x = a$, wodurch $(x-a)\,\frac{dM}{dx} = 0$ wird; es ist also $A = M : \frac{dN}{dx} = \frac{M\,dx}{dN}$.

Beispiel. Es sey der zusammengesetzte Bruch

$$\frac{x^2 + ax + 2a^2}{(x-a)\,(x+2a)\,(x-3a)}$$

in die Summe dreier einfachen Brüche zu zerlegen. Da hier die Faktoren von dem ersten Grade des Nenners direkt gegeben sind, so bedienen wir uns hierzu des ersten in diesem §. angedeuteten Verfahrens.

Um den Zähler A, welcher dem Nenner $x - a$ entspricht, zu bestimmen, so setzen wir a statt x in $M = x^2 + ax + 2a^2$, und $P = (x+2a)\,(x-3a)$, und erhalten so

$$A = \frac{a^2 + a^2 + 2a^2}{(a+2a)\,(a-3a)} = \frac{4a^2}{-6a^2} = -\frac{2}{3}.$$

Um den Zähler B, welcher dem Nenner $x + 2a$ entspricht, zu bestimmen, so setzen wir $-2a$ statt x in $M = x^2 + ax + 2a^2$, und $P = (x-a)\,(x-3a)$,

und erhalten so

$$B = \frac{4a^2 - 2a^2 + 2a^2}{(-2a-a)(-2a-3a)} = \frac{4a^2}{15a^2} = \frac{4}{15}.$$

Um den Zähler C, welcher dem Nenner $x - 3a$ entspricht, zu bestimmen, so setzen wir $3a$ statt x in $M = x^2 + ax + 2a^2$, und $P = (x-a)(x+2a)$, und erhalten so

$$C = \frac{9a^2 + 3a^2 + 2a^2}{(3a-a)(3a+2a)} = \frac{14a^2}{10a^2} = \frac{7}{5}.$$

Der zusammengesetzte Bruch $\frac{x^2 + ax + 2a^2}{(x-a)(x+2a)(x-3a)}$ ist also gleich der Summe der drei einfachen Brüche $\frac{-\frac{2}{3}}{x-a} + \frac{\frac{4}{15}}{x+2a} + \frac{\frac{7}{5}}{x-3a}$.

Es sey der zusammengesetzte Bruch $\frac{ax^2 - 3a^2x - a^3}{x^3 - 7a^2x + 6a^3}$ in die Summe dreier einfachen Brüche zu zerlegen. Da gegenwärtig die Faktoren des Nenners nicht direkt gegeben sind, so wollen wir uns des zweiten in diesem §. angedeuteten Verfahrens bedienen. Es ist hier

$$M = ax^2 - 3a^2x - a^3, \text{ und } \frac{dN}{dx} = 3x^2 - 7a^2.$$

Es ist vorerst $x - a$ ein Faktor des Nenners; um den Zähler a des einfachen Bruches zu bestimmen, welcher diesen Faktor zum Nenner hat, so setzen wir a statt x in M und $\frac{dN}{dx}$, und erhalten so

$$A = \frac{a^3 - 3a^3 - a^3}{3a^2 - 7a^2} = \frac{-3a^3}{-4a^2} = \frac{3}{4}a.$$

Es ist ferner $x - 2a$ ein Faktor des Nenners; setzen wir also $2a$ statt x in M und $\frac{dN}{dx}$, so erhalten wir den Zähler, welcher diesen Faktor zum Nenner hat,

$$B = \frac{4a^3 - 6a^3 - a^3}{12a^2 - 7a^2} = \frac{-3a^3}{5a^2} = -\frac{3}{5}a.$$

Es ist $x + 3a$ der dritte Faktor des Nenners; setzen wir daher $-3a$ statt x in M und $\frac{dN}{dz}$, so erhalten wir den Zähler, welcher diesen Faktor zum Nenner hat,

$$C = \frac{9a^3 + 9a^3 - a^3}{27a^2 - 7a^2} = \frac{17a^3}{20a^2} = \frac{17}{20}a.$$

Es ist also

$$\frac{ax^2 - 3a^2x - a^3}{x^3 - 7a^2x + 6a^3} = \frac{a}{x-a} - \frac{\frac{3}{5}a}{x-2a} + \frac{\frac{17}{20}a}{x+3a}.$$

§. 100.

Es sey $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$ ein imaginärer Faktor des Nenners, so wird, wie in der Algebra bewiesen wird, $x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$ auch ein Faktor des Nenners seyn, (s. meine Algebra, Seite 357).

Es seyen nun $\frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}$, $\frac{B}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$ die einfachen Brüche, welchen diese Nenner angehören; es seyen $u + u'\sqrt{-1}$ und $v + v'\sqrt{-1}$ die Resultate der Substitution, welche wir erhalten, indem wir $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ statt x in M und $\frac{dN}{dx}$ setzen; da nun $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ sich nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ von $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ unterscheidet, so werden auch die Resultate der Substitution von $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ in M und $\frac{dN}{dx}$ sich nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ von den Resultaten der Substitution von $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ unterscheiden, sie werden also $u - u'\sqrt{-1}$ und $v - v'\sqrt{-1}$ seyn; es ist also

$$A = \frac{u + u'\sqrt{-1}}{v + v'\sqrt{-1}} = \frac{(u + u'\sqrt{-1})\ (v - v'\sqrt{-1})}{(v + v'\sqrt{-1})\ (v - v'\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{uv + u'v' - (uv - u'v)\sqrt{-1}}{v^2 + v'^2},$$

$$\text{und } B = \frac{u - u'\sqrt{-1}}{v - v'\sqrt{-1}} = \frac{(u - u'\sqrt{-1})\ (v + v'\sqrt{-1})}{(v - v'\sqrt{-1})\ (v + v'\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{uv + u'v' + (uv' - u'v)\sqrt{-1}}{v^2 + v'^2};$$

die Summe dieser beiden Brüche ist also

$$\frac{uv+u'v'-(uv'-u'v)\sqrt{-1}}{(v^2+v'^2)(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})} + \frac{uv+u'v'-(uv'-u'v)\sqrt{-1}}{(v^2+v'^2)(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})};$$

bringen wir zu einerlei Benennung, und bemerken wir, daß $(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})\ (x - \alpha + \beta\sqrt{-1}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen als Summe dieser beiden Brüche

$$\frac{2(uv + u'v')\ (x - \alpha) + 2\ (uv' - u'v)\,\beta}{(v^2 + v'^2)\ [(x - \alpha)^2 + \beta^2]}.$$

Setzen wir

$$\frac{2(uv+u'v')}{v^2+v'^2} = C, \text{ und } \frac{-2(uv+u'v')\alpha+2(uv'-u'v)\beta)}{v^2+v'^2} = D,$$

so ist die Summe dieser beiden Brüche durch $\frac{Cx + D}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$ vorgestellt; wenn wir also einen zusammengesetzten Bruch nach dem Verfahren des §. 97. in die Summe von einfachen Brüchen zerlegen wollen, so können wir statt der Summe der beiden Brüche, deren Nenner $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$ und $x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$ sind, hinschreiben den einzigen Bruch $\frac{Cx + D}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$; die Bestimmung von C und D erfolgt dann wie im §. 97., nämlich dadurch, daß wir in dem zweiten Gliede unter einerlei Benennung bringen, und sodann die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich setzen.

Wenn ein Faktor von der Gestalt $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2$ in dem Nenner enthalten ist, so folgt leicht aus §. 98., daß hieraus zwei Brüche von der Gestalt

$$\frac{Cx + D}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2}, \quad \frac{Ex + F}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

entstehen; und eben so verhält es sich, wenn eine höhere

Potenz von $(x-\alpha)^2+\beta^2$ in dem Nenner als Faktor enthalten ist.

Beispiel. Es sey der zusammen gesetzte Bruch $\frac{3x^2+5x+6}{x^3+6x-7}$ in die Summe von einfachen Brüchen zu zerlegen.

Es ist $x^3+6x-7=(x-1)(x^2+x+7)$; da nun die beiden Faktoren von dem ersten Grade von x^2+x+7 imaginär sind, so setzen wir

$$\frac{3x^2+5x+6}{x^3+6x-7}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+7};$$

$3x^2+5x+6=A(x^2+x+7)+(Bx+C)(x-1)$
$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+7A-C$; es ist also $A+B=3$, $A-B+C=5$, $7A-C=6$, daher $A=\frac{14}{9}$, $B=\frac{13}{9}$, $C=\frac{44}{9}$, folglich

$$\frac{3x^2+5x+6}{x^3+6x-7}=\frac{\frac{14}{9}}{x-1}+\frac{\frac{13}{9}x+\frac{44}{9}}{x^2+x+7}.$$

§. 101.

Eines Verfahrens, ähnlich dem des §. 99., bedienen wir uns, die Zähler der einfachen Brüche zu bestimmen, wenn in dem Nenner gleiche Faktoren enthalten sind. Da das Verfahren dasselbe bleibt, die Anzahl dieser Faktoren mag seyn, welche sie nur wolle, so wollen wir annehmen, daß der Nenner $=(x-a)^4P$, und daß P den Faktor $x-a$ nicht mehr enthalte; wir stellen also den zusammengesetzten Bruch durch $\frac{M}{(x-a)^4P}$ vor. Setzen wir

$$\frac{M}{(x-a)^4P}=\frac{A}{(x-a)^4}+\frac{B}{(x-a)^3}+\frac{C}{(x-a)^2}+\frac{D}{x-a}+\frac{Q}{P},$$

so muß Q eine ganze Funktion von x seyn, welches wir wie in §. 99. beweisen; bringen wir die Brüche des zweiten Gliedes der Gleichung unter einerlei Benennung, und unterdrücken wir sodann den beiden Gliedern gemeinschaftlichen Nenner, so ist

$$M = P[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3] + Q(x-a)^4;$$

es ist also

$$Q = \frac{M - P[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3]}{(x-a)^4};$$

setzen wir, um abzukürzen, $\frac{M}{P} = V$, so ist

$$Q = \frac{P[V - A - B(x-a) - C(x-a)^2 - D(x-a)^3]}{(x-a)^4} = \frac{PZ}{(x-a)^4},$$

indem wir

$Z = V - A - B(x-a) - C(x-a)^2 + D(x-a)^3$ setzen.

Da nun Q eine ganze Funktion von x ist, und der eine Faktor P des Zählers durch $x - a$ nicht theilbar ist, so muß der andere Faktor Z durch $(x-a)^4$ theilbar seyn; es müssen also (§. 29.) Z und seine drei ersten Differentialquotienten sich in Null verwandeln, indem wir a statt x setzen; es ist

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{dV}{dx} - B - 2C(x-a) - 3D(x-a)^2,$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{d^2V}{dx^2} - 2C - 2 \cdot 3D(x-a),$$

$$\frac{d^3Z}{dx^3} = \frac{d^3V}{dx^3} - 2 \cdot 3D.$$

Setzen wir nun $x = a$, so erhalten wir

$$Z = V - A = o, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dV}{dx} - B = o,$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{d^2V}{dx^2} - 2C = o, \quad \frac{d^3Z}{dx^3} = \frac{d^3V}{dx^3} - 2 \cdot 3D = o;$$

hieraus erhalten wir die Werthe von

$$A = V, \; B = \frac{dV}{dx}, \; C = \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}, \; D = \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{d^3V}{dx^3},$$

wo überall in V, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, a statt x zu setzen ist.

Auf dieselbe Weise bestimmen wir den Zähler der einfachen Brüche, wenn die Anzahl der in dem Nenner vorkommenden gleichen Faktoren größer als 4 ist; so, z. B., wenn $(x-a)^5$ Faktor im Nenner ist, A den Zähler von

$(x-a)^5$, ..., und E den Zähler von $x-a$ vorstellt, so sind die Werthe von A, B, C, D dieselben, wie vorhin, und es ist $E = \frac{1}{2.3.4} \frac{d^4V}{dx^4}$.

Beispiel. Es sey der zusammengesetzte Bruch $\frac{x^4}{(x-a)^3\,(x-b)}$ auf die angegebene Weise umzuwandeln.

Es ist hier $V = \frac{M}{P} = \frac{x^4}{x-b}$, daher

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4x^3}{x-b} - \frac{x^4}{(x-b)^2} = \frac{x^3\,(3x-4b)}{(x-b)^2},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{3x^2\,(3x-4b) + 3x^3}{(x-b)^2} - \frac{2x^3\,(3x-4b)}{(x-b)^3}$$

$$= \frac{x^2\,(6x^2 - 16bx + 12b^2)}{(x-b)^3};$$

setzen wir a statt x, so erhalten wir

$$A = \frac{a^4}{a-b}, \quad B = \frac{dV}{dx} = \frac{a^3\,(3a-4b)}{(a-b)^2},$$

$$C = \tfrac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{a^2\,(3a^2 - 8ab + 6b^2)}{(a-b)^3}.$$

Um den Zähler E zu bestimmen, welcher $x-b$ zum Nenner hat, so setzen wir b statt x in $M = x^4$ und $P = (x-a)^3$, und erhalten so $E = -\frac{a^4}{(a-b)^3}$; es ist also

$$\frac{x^4}{(x-a)^4\,(x-b)} = \frac{a^4}{a-b}\frac{1}{(x-a)^3} + \frac{a^3(3a-4b)}{(a-b)^2}\frac{1}{(x-a)^2}$$

$$+ \frac{a^2(3a^2-8ab+6b^2)}{(a-b)^3}\frac{1}{x-a} - \frac{b^4}{(a-b)^3}\frac{1}{x-b}.$$

§. 102.

Wir haben (§. 32.) gesehen, daß, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, und x einen beliebigen Werth vorstellt,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Da diese Entwickelung für einen jeden Werth von x richtig ist, so bleibt sie auch richtig, wenn wir statt x setzen $x\sqrt{-1}$; indem wir nun bemerken, daß, wenn n eine beliebige ganze Zahl vorstellt, $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$, $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$, $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$, so verwandelt sich die vorige Entwickelung in

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5}\sqrt{-1} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} - \ldots.$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots.$$

$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)$$

Es ist aber (§. 34.)

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots.$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots.;$$

substituiren wir diese Werthe, so ist

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \sin. x \ldots (1);$$

setzen wir $-x$ statt $+x$, und bemerken wir, daß $\cos. -x = +\cos. x$, $\sin. -x = -\sin. x$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1} \sin. x \ldots (2);$$

es ist also im allgemeinen

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos. x \pm \sqrt{-1} \sin. x \ldots (3),$$

in welcher Gleichung entweder das obere oder das untere Zeichen zugleich zu nehmen ist.

Diese Gleichung drückt einen der merkwürdigsten Sätze der höheren Analysis aus, indem aus derselben hervorgeht, auf welche Weise transzendente Funktionen von anscheinend

ganz verschiedener Art, nämlich Exponential- und trigonometrische Funktionen zusammenhängen. Obschon sie unter einer imaginären Gestalt erscheint, so werden wir doch nach und nach aus derselben die wichtigsten Folgerungen herleiten.

Addiren wir die Gleichungen 1 und 2, so erhalten wir $\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; subtrahiren wir die Gleichung 2 von 1, so erhalten wir

$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Diese Gleichungen sind nur als abgekürzte allgemeine analytische Ausdrücke zu betrachten; indem wir nämlich statt $e^{x\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\sqrt{-1}}$ wieder ihre Entwickelungen hinschreiben, und reduziren, so verwandeln sich die zweiten Glieder derselben wieder in die bekannten Entwickelungen von sin. x und cos. x.

Die Gleichungen 1 und 2 sind gleichbedeutend mit

$$x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x),$$
$$-x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x);$$

subtrahiren wir die zweite Gleichung von der ersten, so ist

$$2x\sqrt{-1} = \log. \frac{\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x}{\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x},$$

folglich

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \sqrt{-1} \text{ tg. } x}{1 - \sqrt{-1} \text{ tg. } x}.$$

§. 103.

Setzen wir in die Gleichung 3 des vorigen §. mx statt x, so ist $e^{\pm mx\sqrt{-1}} = \cos. mx \pm \sqrt{-1} \sin. mx$; erheben wir die beiden Glieder dieser Gleichung 3 zur Potenz m, so ist $e^{\pm mx\sqrt{-1}} = (\cos. x \pm \sqrt{-1} \sin. x)^m$; da das erste Glied dieser beiden Gleichungen das nämliche ist, so müssen auch die zweiten Glieder gleich seyn; es ist also

$\cos. mx \pm \sqrt{-1} \sin. mx = (\cos. x \pm \sqrt{-1} \sin. x)^m$,
welches wieder eine sehr bemerkungswerthe Gleichung ist.

Indem wir vorerst die Gleichung

$\cos. mx + \sqrt{-1} \sin. mx = (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m$

zu der Gleichung

$\cos. mx - \sqrt{-1} \sin. mx = (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^m$

addiren, und sodann diese von jener subtrahiren, so erhalten wir

$$\cos. mx = \frac{(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m + (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^m}{2},$$

$$\sin. mx = \frac{(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m - (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Es ist

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m = \cos. x^m + m\sqrt{-1} \cos. x^{m-1} \sin. x - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos. x^{m-2} \sin. x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \sqrt{-1} \cos. x^{m-3} \sin. x^3 + \ldots,$$

$$(\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^m = \cos. x^m - m\sqrt{-1} \cos. x^{m-1} \sin. x - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos. x^{m-2} \sin. x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \sqrt{-1} \cos. x^{m-3} \sin. x^3 + \ldots.$$

Indem wir diese beiden Gleichungen addiren, so heben sich die imaginären Theilsätze der beiden Entwickelungen auf; es ist also

$$\cos. mx = \cos. x^m - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos. x^{m-2} \sin. x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos. x^{m-4} \sin. x^4 - \ldots.$$

Indem wir die zweite Gleichung von der ersten subtrahiren, so heben sich die reellen Theilsätze der beiden Entwickelungen auf, $\sqrt{-1}$ wird also gemeinschaftlicher Faktor; indem wir aber sodann, um den Werth von sin. mx zu bestimmen, durch $2\sqrt{-1}$ dividiren, so verschwindet das Imaginäre, und wir erhalten

$$\sin. mx = m \cos. x^{m-1} \sin. x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos. x^{m-3} \sin. x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \cos. x^{m-5} \sin. x^5 - \ldots.$$

Es sey, z. B., $m = 5$, so ist

$$\cos. 5x = \cos. x^5 - 10 \cos. x^3 \sin. x^2 + 5 \cos. x \sin. x^4,$$

und

$$\sin. 5x = 5 \cos. x^4 \sin. x - 10 \cos. x^2 \sin. x^3 + \sin. x^5.$$

§. 104.

Drücken wir nun umgekehrt die Potenz eines Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen aus.

Setzen wir

$$\cos. x + \sin. x \sqrt{-1} = u, \quad \cos. x - \sin. x \sqrt{-1} = v,$$

so erhalten wir durch die Addition dieser beiden Gleichungen $2 \cos. x = u + v$, und durch die Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten $2 \sqrt{-1} \sin. x = u - v$.

Da $(u + v)^n = (v + u)^n$, so ist

$$2^n \cos. x^n = u^n + n u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2} v^2 + \ldots,$$

und eben so

$$2^n \cos. x^n = v^n + n v^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2} u^2 + \ldots;$$

addiren wir diese beiden Gleichungen, so ist

$$2.2^n \cos. x^n = u^n + v^n + nuv\,(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots\ldots$$

Es ist

$$uv = (\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})(\cos. x - \sin. x \sqrt{-1}) = \cos. x^2 + \sin. x^2 = 1,$$

daher auch $u^2 v^2 = 1$, $u^3 v^3 = 1$, u. s. w.; es ist ferner

$$u^m = (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m = \cos. mx + \sqrt{-1} \sin. mx,$$

$$v^m = (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^m = \cos. mx - \sqrt{-1} \sin. mx,$$

es ist also im allgemeinen

$$u^m + v^m = 2 \cos. mx, \quad u^m - v^m = 2 \sqrt{-1} \sin. mx;$$

setzen wir diese Werthe in die vorige Gleichungen, und dividiren wir durch 2, so ist

$$2^n \cos. x^n = \cos. nx + n \cos. (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos. (n-4)x + ..$$

Der letzte Theilsatz dieser Reihe ist

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\cos.(n-2n)x = \cos.-nx = \cos.nx,$$

weil im allgemeinen $\cos.-a = +\cos.a$; auf dieselbe Weise finden wir, daß alle Theilsätze, welche gleichweit von den beiden äußern entfernt sind, gleich sind; indem wir uns nun je zwei gleiche Theilsätze addirt denken, so erhalten wir, indem wir auf beiden Seiten durch 2 dividiren

$$2^{n-1}\cos.x^n = \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \ldots$$

Wenn jedoch n eine gerade Zahl ist, so ist die Anzahl der ursprünglichen Theilsätze des zweiten Gliedes $n+1$ ungerade, der Theilsatz in der Mitte hat also dann keinen gleichen; wir dürfen also in diesem Falle in der letzten Gleichung nur die Hälfte des letzten Theilsatzes ihres zweiten Gliedes nehmen.

Es sey, z. B., $n = 7$, so ist

$$2^6\cos.x^7 = \cos.7x + 7\cos.5x + 21\cos.3x + 35\cos.x;$$

es sey $n = 6$, also gerade, so ist

$$2^5\cos.x^6 = \cos.6x + 6\cos.4x + 15\cos.2x + 10,$$

weil hier von dem letzten Theilsatze $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ nur die Hälfte $= 10$ zu nehmen ist.

Um die Potenzen von sin. x auf dieselbe Weise auszudrücken, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist diese Potenz n gerade, oder ungerade.

Angenommen, n sey gerade; da nun $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$ (das obere Zeichen gilt, wenn n gerade Mal gerade, d. h., durch 4 theilbar ist; das untere Zeichen gilt, wenn n einfach gerade ist, d. h., wenn n, durch 2 getheilt, einen ungeraden Quotienten gibt), und da ferner gegenwärtig $(u-v)^n = (v-u)^n$, so erhalten wir, indem wir die Gleichung $2\sqrt{-1}\sin.x = u - v$ zu der nten Potenz erheben

$$\pm 2^n\sin.x^n = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 - \ldots\ldots,$$

$$\pm 2^n\sin.x^n = v^n - nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 - \ldots\ldots;$$

addiren wir diese beiden Gleichungen, so ist

$$2 \cdot 2^n \sin. x^n = u^n + v^n - nuv\,(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) - \ldots.$$

Setzen wir statt uv, deren Potenzen, $u^n + v^n$, u. s. w., ihre vorhin gefundenen Werthe, und dividiren wir sodann durch 2, so ist

$$\pm 2^n \sin. x^n = \cos. nx - n \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos.(n-4)x - \ldots$$

Da nach Annahme n gerade ist, so ist der letzte Theilsatz dieser aus $n + 1$ Theilsätzen bestehenden Entwickelung

$$+ \frac{n(n-1)\ldots.(n-n+1)}{1.2 \quad \ldots. \quad n} \cos.(n-2n)x = + \cos. nx,$$

und eben so sind je zwei gleichweit von den äußern entfernte Theilsätze gleich; addiren wir also dieselben, dividiren wir sodann durch 2, und bemerken wir, daß, wie wir vorhin nachzeigten, weil n gerade ist, von dem Theilsatze in der Mitte nur die Hälfte zu nehmen ist, so können wir dieses so anschreiben:

$$\pm 2^{n-1} \sin. x^n = \cos. nx - n \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos.(n-4)x - ..$$

Es sey, z. B., $n = 8$, so ist das obere Zeichen zu nehmen, daher

$$+2^7 \sin. x^8 = \cos. 8x - 8\cos. 6x + 28\cos. 4x + 56\cos. 2x + 35.$$

Es sey $n = 6$, so ist das untere Zeichen zu nehmen, daher

$$-2^5 \sin. x^6 = \cos. 6x - 6\cos. 4x + 15\cos. 2x - 10.$$

Angenommen nun, n sey ungerade. Da nun $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n \sqrt{-1}$ (das obere Zeichen gilt, wenn n gleich ist einer um 1 vermehrten gerade Mal geraden Zahl; das untere Zeichen gilt, wenn n gleich ist einer um 1 vermehrten einfach geraden Zahl), und da gegenwärtig $(u - v)^n = -(v - u)^n$, so ist, indem wir die Gleichung $2\sqrt{-1} \sin. x = u - v$ zu der nten Potenz erheben

$$\pm 2^n \sqrt{-1} \sin. x^n = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2}v^2 - \ldots\ldots$$

$$\pm 2^n \sqrt{-1} \sin. x^n = -v^n + nv^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2}u^2 - \ldots;$$

addiren wir diese beiden Gleichungen, so ist

$$\pm 2 \,.\, 2^n \sin. x^n = u^n - v^n - nuv\,(u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots\ldots$$

Setzen wir statt uv, deren Potenzen, $u^n - v^n$, u. s. w., ihre vorhin gefundenen Werthe, und dividiren wir durch $2\sqrt{-1}$, so ist

$$\pm 2^n \sin x^n = \sin. nx - n \sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin.(n-4)x - ..$$

Der letzte Theilsatz des zweiten Gliedes ist

$$-\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-n+1)}{1.2\quad\ldots\quad n} \sin.\,(n-2n)\,x$$

$$= -\sin. -nx = +\sin. nx,$$

weil im allgemeinen sin. $-a = -$ sin. a; eben so verhält es sich mit je zwei gleichweit von den äußern entfernten Theilsätzen; da nun die Anzahl $n + 1$ sämmtlicher Theilsätze eine gerade ist, so erhalten wir, indem wir je zwei gleiche Theilsätze addiren, und sodann die Gleichung durch 2 dividiren, $\pm 2^{n-1}$ sin. x^n

$$= \sin. nx - n \sin.\,(n-2)\,x + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin.(n-4)x - \ldots$$

Es sey, z. B., $n = 5$, so gilt das obere Zeichen, und es ist

$$2^4 \sin. x^5 = \sin. 5x - 5 \sin. 3x + 10 \sin. x.$$

Es sey $n = 7$, so ist das untere Zeichen zu nehmen, daher

$$-2^6 \sin. x^7 = \sin. 7x - 7 \sin. 5x + 21 \sin. 3x - 35 \sin. x.$$

Diese Entwickelungen sind jedoch nur in dem Falle richtig, wenn n eine ganze Zahl ist. Die weiteren Betrachtungen sind zu weitläufig, um hier eine Stelle finden zu können.

§. 105.

Aus der Gleichung 3 des §. 102. folgt $\pm x\sqrt{-1} = \log.(\cos. x \pm \sqrt{-1} \sin. x)$.

Bestimmen wir darnach den natürlichen Logarithmen eines unter der Gestalt $a \pm b\sqrt{-1}$ erscheinenden Ausdruckes.

Setzen wir $\sqrt{a^2+b^2} = r$; es sey $\frac{a}{r} = \cos. z$, so ist

$$\frac{b}{r} = \sin. z, \text{ und } a \pm b\sqrt{-1}$$

$$= r\left(\frac{a}{r} \pm \frac{b}{r}\sqrt{-1}\right) = r(\cos. z \pm \sqrt{-1} \sin. z),$$

daher

$$\log.(a + b\sqrt{-1}) = \log. r + \log.(\cos. z \pm \sqrt{-1} \sin. z)$$

$$= \log. r \pm z\sqrt{-1} = \log\sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{-1} \text{ arc. sin. } \frac{b}{r}.$$

Da jedoch der Bogen z dadurch gegeben ist, daß sein Sinus $= \frac{b}{r}$, und sein Cosinus $= \frac{a}{r}$, so können wir statt z im allgemeinen setzen $2 i \pi + z$; indem wir durch i eine beliebige ganze Zahl, und durch π die halbe Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser $= 1$, vorstellen, denn welchen ganzen Werth wir auch i geben, so gehören immer dem Bogen $2 i \pi + z$ dieselben trigonometrischen Linien an, welche dem Bogen z angehören; es ist also im allgemeinen $\log.(a + b\sqrt{-1}) = \log. r \pm (2 i \pi + z)\sqrt{-1}$.

Setzen wir in dieser Gleichung $b = 0$, so ist $r = \sqrt{a^2+b^2} = a$, und $z = 0$, weil der Sinus dieses Bogens $= 0$, und sein Cosinus $= 1$; stellen wir durch Log. a den natürlichen Logarithmen von a vor, welchen wir in den Tafeln finden, so erhalten wir

$$\log. a = \text{Log. } a \pm 2 i \pi \sqrt{-1}.$$

Eine jede Zahl a hat also unzählig viele Logarithmen, indem wir in dieser Gleichung i einen jeden beliebigen ganzen Werth geben dürfen; unter allen diesen Werthen ist je-

doch nur Log. a, welcher $i = o$ entspricht, und welcher der in den Tafeln aufzusuchende Logarithme von a ist, reell; alle übrigen dagegen sind imaginär.

Wenn $a = 1$, so ist Log. $a =$ Log. $1 = o$, folglich log. $1 = \pm 2 i \pi \sqrt{-1}$; der einzige reelle Werth von log. 1 ist also Null, welcher $i = o$ entspricht.

Setzen wir in die erste Gleichung dieses §. $(2i+1)\pi$ statt x, welches i wieder eine beliebige ganze Zahl vorstellt, so erhalten wir

$\pm(2i+1)\pi\sqrt{-1} = \log.[\cos.(2i+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin.(2i+1)\pi]$;

es ist aber $\cos.(2i+1)\pi = -1$, $\sin.(2i+1)\pi = o$, folglich log. $-1 = \pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}$.

Es ist im allgemeinen

log. $-a =$ log. $(-1 \times a) =$ Log. $a +$ log. -1,

folglich log. $-a =$ Log. $a \pm (2i+1)\pi\sqrt{-1}$.

Der Logarithme einer negativen Zahl hat also ebenfalls eine unendliche Anzahl von Werthen; alle diese Werthe sind aber imaginär, weil $2i+1$ für keinen Werth von i Null werden kann.

§. 106.

Vermittelst der Gleichung 3 des §. 102. sind wir im Stande, sämmtliche Wurzeln sowohl der Gleichung $y^n = a^n$, als auch der Gleichung $y^n = -a^n$ zu bestimmen.

Die erste Gleichung läßt sich auch so anschreiben:

$\frac{y^n}{a^n} = 1$, $\left(\frac{y}{a}\right)^n = 1$; setzen wir in die Gleichung 3 $2i\pi$ statt x, welches i wieder eine beliebige ganze Zahl vorstellt, so verwandelt sich dieselbe in

$e^{\pm 2i\pi\sqrt{-1}} = \cos. 2i\pi \pm \sqrt{-1} \sin. 2i\pi$; da nun $\cos. 2i\pi = 1$, $\sin. 2i\pi = o$, so ist $e^{\pm 2i\pi\sqrt{-1}} = 1$, folglich

$\left(\frac{y}{a}\right)^n = e^{\pm 2i\pi\sqrt{-1}}$, daher $\frac{y}{a} = e^{\pm \frac{2i\pi}{n}\sqrt{-1}}$, also

$y = a\, e^{\pm \frac{2i\pi}{n}\sqrt{-1}}$; setzen wir jetzt in die Gleichung 3 von §. 102. $\frac{2i\pi}{n}$ statt x, so erhalten wir

$$e^{\pm \frac{2i\pi}{n}\sqrt{-1}} = \cos.\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2i\pi}{n};$$ es ist also

$$y = a\left(\cos.\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2i\pi}{n}\right).$$

Für einen jeden Werth, welchen wir i geben, erhalten wir zwei Werthe für y, d. h., zwei Wurzeln der Gleichung $y^n = a^n$, welche nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ verschieden sind; indem wir jedoch vorerst $i = o$ setzen, so erhalten wir nur den einen entsprechenden Werth $y = a$. Wenn n ungerade ist, so setzen wir zuerst $i = 1$, sodann $i = 2$, ... und endlich $i = \frac{n-1}{2}$; eine jede dieser Substitutionen gibt zwei Wurzeln von y, zusammen erhalten wir also dadurch $\frac{2(n-1)}{2} = n - 1$ Wurzeln, welche, verbunden mit der vorhin gefundenen Wurzel $y = a$ die sämmtlichen n Wurzeln der Gleichung $y^n = a^n$ sind.

Wenn n gerade ist, so setzen wir wieder zuerst $i = 1$, sodann $i = 2$, ... und endlich $i = \frac{n-2}{2}$; da eine jede dieser Substitutionen zwei Wurzeln von y gibt, so erhalten wir dadurch $n - 2$ Wurzeln; setzen wir sodann $i = \frac{n}{2}$, so erhalten wir dadurch die einzige Wurzel $y = -a$, weil $\cos.\pi = -1$, $\sin.\pi = o$; diese $n - 1$ Wurzeln, verbunden mit der zuerst gefundenen Wurzel $y = a$, sind die sämmtlichen n Wurzeln der Gleichung $y^n = a^n$.

Durch fernere Substitutionen bestimmen wir keine neuen Wurzeln dieser Gleichung; denn setzen wir, z. B., $i = \frac{n+1}{2}$, wenn nämlich n ungerade ist, so ist

$$\cos.\frac{2(n+1)}{2n}\pi = \cos.\left(\pi + \frac{1}{n}\pi\right) = -\cos.\frac{1}{n}\pi,$$

$$\sin.\frac{2(n+1)}{2n}\pi = \sin.\left(\pi + \frac{1}{n}\pi\right) = -\sin.\frac{1}{n}\pi,$$

daher die entsprechenden Werthe von

$$y = a\left(-\cos.\frac{1}{n}\pi \mp \sqrt{-1}\sin.\frac{1}{n}\pi\right);$$

indem wir aber vorhin $i = \frac{n-1}{2}$ setzten, so war

$$\cos.\frac{2(n-1)\pi}{2n} = \cos.\left(\pi - \frac{1}{n}\pi\right) = -\cos.\frac{1}{n}\pi,$$

$$\sin.\frac{2(n-1)\pi}{2n} = \sin.\left(\pi - \frac{1}{n}\pi\right) = +\sin.\frac{1}{n}\pi,$$

daher die entsprechenden Werthe von

$$y = a\left(-\cos.\frac{1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\sin.\frac{1}{n}\pi\right);$$

diese beiden Paare von Werthen stimmen also mit einander überein.

Es ist also $y^n - a^n$ theilbar, sowohl durch

$$y - a\left(\cos.\frac{2i\pi}{n}\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}\right),$$

als auch durch

$$y - a\left(\cos.\frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}\right);$$

das Produkt dieser beiden Theiler, welches ein Theiler von dem zweiten Grade von $y^n - a^n$ seyn wird, vorausgesetzt nämlich, daß i nicht $= o$, und nicht $= \frac{n}{2}$, wenn n gerade ist, ist $y^2 - 2ay\cos.\frac{2i\pi}{n} + a^2$.

So erhalten wir, z. B., die Theiler von $y^5 - a^5$, indem wir $n = 5$, und sodann zuerst $i = o$, woraus der Theiler von dem ersten Grade $y - a$ folgt, sodann $i = 1$, und endlich $i = 2$ setzen:

$$y - a$$

$$y^2 - 2ay \cos. \frac{2\pi}{5} + a^2,$$

$$y^2 - 2ay \cos. \frac{4\pi}{5} + a^2.$$

Eben so erhalten wir die Theiler von $y^6 - a^6$, indem wir $n = 6$, und sodann vorerst $i = o$, sodann $i = 1$, sodann $i = 2$, und endlich $i = 3$ setzen, dabei jedoch bemerken, daß aus $i = o$ und $i = 3$ nur Theiler von dem ersten Grade folgen:

$$y - a$$

$$y^2 - 2ay \cos. \frac{2}{6}\pi + a^2,$$

$$y^2 - 2ay \cos. \frac{4}{6}\pi + a^2,$$

$$y + a.$$

§. 107.

Bestimmen wir nun eben so die Wurzeln der Gleichung $y^n + a^n = o$.

Diese Gleichung läßt sich umwandeln in

$$\frac{y^n}{a^n} = -1, \quad \left(\frac{y}{a}\right)^n = -1.$$

Setzen wir in die Gleichung 3 von §. 102. $(2i+1)\pi$ statt x, und bemerken wir, daß $\cos.(2i+1)\pi = -1$, $\sin.(2i+1)\pi = o$, so erhalten wir $e^{\pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$, daher $\left(\frac{y}{a}\right)^n = e^{(\pm 2i+1)\pi\sqrt{-1}}$, folglich

$y = a\, e^{\frac{\pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}}{n}}$; setzen wir nun in die Gleichung 3 von §. 102. $\frac{(2i+1)\pi}{n}$ statt x, so ist

$$e^{\pm\frac{(2i+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos. \frac{2i+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{2i+1}{n}\pi;$$

es ist also

$$y = a\left(\cos.\frac{2i+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\sin.\frac{2i+1}{n}\pi\right).$$

Setzen wir nun nach und nach $i = o$, $i = 1$, $i = 2$, ... und zuletzt $i = \frac{n-2}{2}$, wenn n gerade ist, so erhalten wir durch eine jede Substitution 2 Werthe von y, im Ganzen also n Werthe von y; wenn n ungerade ist, so setzen wir zuletzt $i = \frac{n-1}{2}$, durch welche letzte Substitution wir nur einen Werth von $y = -a$ erhalten; im Ganzen erhalten wir also auch hier eben so viel Werthe von y, als Einheiten in n enthalten sind. Wie in dem vorigen §. zeigen wir nach, daß aus ferneren Substitutionen keine neue Wurzeln der Gleichungen folgen.

Es ist also $y^n + a^n$ theilbar sowohl durch

$$y - a\left(\cos.\frac{2i+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i+1}{n}\pi\right),$$

als auch durch

$$y - a\left(\cos.\frac{2i+1}{n}\pi - \sqrt{-1}\sin.\frac{2i+1}{n}\pi\right),$$

daher auch theilbar durch das Produkt dieser beiden Faktoren $y^2 - 2ay\cos.\frac{2i+1}{n}\pi + a^2$.

So erhalten wir die Theiler von $y^5 + a^5$, indem wir $n = 5$, und zuerst $i = o$, sodann $i = 1$, und endlich $i = \frac{5-1}{2} = 2$ setzen, aus welcher letztern Voraussetzung jedoch nur eine Wurzel $-a$ der Gleichung, daher auch nur ein Theiler $y + a$ folgt:

$$y^2 - 2ay\cos.\frac{1}{5}\pi + a^2,$$

$$y^2 - 2ay\cos.\frac{3}{5}\pi + a^2,$$

$$y + a$$

Eben so erhalten wir die Theiler von $y^6 + a^6$, indem wir $n = 6$, und zuerst $i = o$, sodann $i = 1$, und endlich $i = \frac{6-2}{2} = 2$ setzen:

$$y^2 - 2\,ay\,\cos.\,\frac{1}{6}\,\pi + a^2,$$

$$y^2 - 2\,ay\,\cos.\,\frac{3}{6}\,\pi + a^2,$$

$$y^2 - 2\,ay\,\cos.\,\frac{5}{6}\,\pi + a^2.$$

Weil $\cos.\,\frac{3}{6}\,\pi = \cos.\,\frac{1}{2}\,\pi = o$, so ist der zweite Theiler gleichbedeutend mit $y^2 + a^2$.

§. 108.

Zerlegen wir nun nach dem in §. 100. angedeuteten Verfahren den Bruch $\frac{y^m}{y^n - a^n}$ und den Bruch $\frac{y^m}{y^n + a^n}$ in die Summe der einfachen Brüche, deren Nenner die reellen Theiler von dem ersten und zweiten Grade von $y^n - a^n$ und $y^n + a^n$ sind.

Die Theiler von dem ersten Grade sind im allgemeinen ausgedrückt durch $x - a\cos\varphi - a\sin.\varphi\sqrt{-1}$, und $x - a\cos.\varphi + a\sin.\varphi\sqrt{-1}$, welches $\varphi = \frac{2i\pi}{n}$, wenn a^n negativ, dagegen $= \frac{(2i+1)\pi}{n}$, wenn a^n positiv ist.

Vorausgesetzt nun, daß nicht durch einen Werth, welchen wir i geben, $\sin.\varphi = o$ wird, also die beiden Wurzeln zusammen nur eine einzige reelle vorstellen, in welchem Falle wir den entsprechenden Zähler auf dem gewöhnlichen Wege (§. 99.) bestimmen, wollen wir die Summe der beiden einfachen Brüche finden, deren Nenner die beiden obigen Faktoren sind.

Es ist gegenwärtig (§. 100.) $\alpha = a \cos. \varphi$, $\beta = a \sin. \varphi$, $M = x^m$, $\frac{dN}{dx} = nx^{n-1}$, daher das Resultat der Substitution von $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ in M

$= a^m (\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1})^m = a^m (\cos. m\varphi + \sqrt{-1} \sin. m\varphi)$,

und in $\frac{dN}{dx} = na^{n-1} (\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1})^{n-1}$

$= na^{n-1} [\cos. (n-1)\varphi + \sqrt{-1} \sin. (n-1)\varphi]$;

es ist also $u = a^m \cos. m\varphi$, $u' = a^m \sin. m\varphi$,

$v = na^{n-1} \cos. (n-1)\varphi$, $v' = na^{n-1} \sin. (n-1)\varphi$;

substituiren wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung von §. 100., und bemerken wir, daß gegenwärtig

$uv + u'v' = na^{n+m-1} [\cos. m\varphi \cos. (n-1)\varphi + \sin. m\varphi \sin. (n-1)\varphi] = na^{n+m-1} \cos. (n-m-1)\varphi$;

$uv' - u'v = na^{n+m-1} [\cos. m\varphi \sin. (n-1)\varphi - \sin. m\varphi \cos. (n-1)\varphi] = na^{n+m-1} \sin. (n-m-1)\varphi$,

$v^2 + v'^2 = n^2 a^{2n-2}$;

$-\cos. \varphi \cos. (n-m-1)\varphi + \sin. \varphi \sin. (n-m-1)\varphi = -\cos. (n-m)\varphi$, so erhalten wir als Summe der beiden einfachen Brüche:

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{\cos. (n-m-1)\varphi \,.\, y - a \cos. (n-m)\varphi}{a^{n-m-1} (y^2 - 2ay \cos. \varphi + a^2)}.$$

Zerlegen wir auf diese Weise $\frac{x^3}{x^5 - a^5}$.

Es ist hier $m = 3$, $n = 5$, $\varphi = \frac{2i\pi}{5}$; $x^5 - a^5$ hat vorerst den reellen Faktor von dem ersten Grade $x - a$; um nun den Zähler zu bestimmen, welcher diesen Nenner haben wird, so setzen wir a statt x in $M = x^3$ und $\frac{dN}{dx} = 5x^4$, und erhalten so diesen Zähler $= \frac{a^3}{5a^4} = \frac{1}{5a}$; die zwei andern Brüche, von welchen ein jeder die Summe zweier einfacher Brüche ist, erhalten wir, indem wir vorerst $i = 1$ und sodann $i = 2$ setzen; es ist also

$$\frac{x^3}{x^5-a^5} = \frac{1}{5a(x-a)} + \frac{2}{5} \cdot \frac{\cos.\frac{2}{5}.\pi.x - a\cos.\frac{4}{5}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{2}{5}\pi+a^2)}$$

$$+\frac{2}{5}\frac{\cos.\frac{4}{5}\pi.x - a\cos.\frac{8}{5}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{4}{5}\pi+a^2)} =$$

(weil im allgemeinen $\cos.(\pi-\alpha) = \cos.(\pi+\alpha) = -\cos.\alpha$)

$$\frac{1}{5a(x-a)} + \frac{2}{5}\frac{\cos.\frac{2}{5}\pi x + a\cos.\frac{1}{5}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{2}{5}\pi+a^2)}$$

$$-\frac{2}{5}\frac{\cos.\frac{1}{5}\pi.x - a\cos.\frac{2}{5}\pi}{a(x^2+2ax\cos.\frac{1}{5}\pi+a^2)}.$$

Zerlegen wir eben so $\frac{x^4}{x^6+a^6}$.

Es ist hier $m = 4$, $n = 6$, $\varphi = \frac{2i+1}{6}\pi$; um nun die drei Brüche zu bestimmen, von welchen ein jeder die Summe zweier einfachen Brüche ist, so setzen wir vorerst $i = o$, sodann $i = 1$, und endlich $i = 2$, und erhalten so

$$\frac{x^4}{x^6+a^6} = \frac{2}{6}\cdot\frac{\cos.\frac{1}{6}\pi.x - a\cos.\frac{2}{6}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{1}{6}\pi+a^2)}$$

$$+\frac{2}{6}\frac{\cos.\frac{3}{6}\pi.x - a\cos.\frac{6}{6}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{3}{6}\pi+a^2)}$$

$$+\frac{2}{6}\frac{\cos.\frac{5}{6}\pi.x - a\cos.\frac{10}{6}\pi}{a(x^2-2ax\cos.\frac{5}{6}\pi+a^2)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\cos. \frac{1}{6}\pi\, x - a \cos. \frac{1}{3}\pi}{a(x^2 - 2ax \cos. \frac{1}{6}\pi + a^2)} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$- \frac{1}{3} \frac{\cos. \frac{1}{6}\pi\, x + a \cos. \frac{1}{3}\pi}{a(x^2 - 2ax \cos. \frac{1}{5}\pi + a^2)}.$$

Integralrechnung.

§. 109.

Die Integralrechnung hat zum Zwecke, die ursprüngliche Gleichung zu bestimmen, durch deren Differentiation eine gegebene Differentialgleichung entstanden ist.

Wir betrachten hier vorerst diejenigen Differentialgleichungen, welche zwischen zwei veränderlichen Größen x und y und den Differentialquotienten von y stattfinden; wir nehmen ferner vorerst an, daß in der Differentialgleichung nur der erste Differentialquotient von y, und zwar nur in der ersten Potenz, vorkomme.

Wenn wir nun in der Gleichung den Werth dieses ersten Differentialquotienten nehmen, so ist derselbe entweder durch eine Funktion nur einer der veränderlichen Größen, oder durch eine Funktion der beiden veränderlichen Größen ausgedrückt. Hier nehmen wir vorerst an, daß der Differentialquotient durch eine Funktion von nur einer der beiden veränderlichen Größen, und zwar von x, ausgedrückt sey; die Differentialgleichung ist also dann von der Gestalt $\frac{dy}{dx} = X$, welches X eine bestimmte Funktion von x vorstellt. Das Differential von y ist also $dy = X\,dx$, und y selbst ist gleich derjenigen Funktion von x, deren Differential $X\,dx$ ist, und welche wir das Integral von $X\,dx$ nennen. Dieses Integral deutet man durch die Vor-

setzung des Zeichens $\int$ an, so zwar, daß $\int X\,dx$ das Integral von $X\,dx$, d. h., diejenige ursprüngliche Funktion von x vorstellt, welche $X\,dx$ zum Differential hat.

Damit jedoch dieses Integral vollständig sey, d. h., alle ursprüngliche Gleichungen umfasse, durch deren Differentiation wir zu der Gleichung $dy = X\,dx$ gelangen, so müssen wir $\int X\,dx$ noch eine willkürliche beständige Größe, welche wir durch C vorstellen wollen, beifügen, und erhalten so im allgemeinen die Gleichung $y = \int X\,dx + C$, durch deren Differentiation wir wieder auf $dy = X\,dx$ gelangen, weil $dC = o$; wenn wir nur $y = \int X\,dx$ setzten, so würde dieses den speziellen Fall vorstellen, in welchem $C = o$. Wir bestimmen sodann C, wenn aus der Natur der Aufgabe, welche zu der Differentialgleichung führte, hervorgeht, daß einem bestimmten Werthe $x = a$ ein bestimmter Werth $y = b$ entspricht; setzen wir diese Werthe in die gefundene Integralgleichung, so ist in derselben nichts mehr unbestimmt, als C; wir erhalten also dadurch C.

Um diese Bestimmungsweise an einem Beispiele zu verdeutlichen, so habe uns eine Aufgabe zu der Differentialgleichung $dy = 3\,Ax^2\,dx$ geführt, und man wisse im Voraus, daß dem Werthe $x = a$ der Werth $y = b$ entspricht.

Es ist leicht einzusehen, daß $3\,Ax^2\,dx$ das Differential von Ax^3 ist; die gesuchte Integralgleichung ist also $y = \int 3\,Ax^2\,dx + C = Ax^3 + C$.

Setzen wir also zugleich $y = b$, $x = a$, so erhalten wir $b = Aa^3 + C$, daher $C = b - Aa^3$; das vollständige Integral wird also für den gegenwärtigen Fall $y = Ax^3 + b - Aa^3$ seyn.

Von der Integration der Differentialgleichungen, in welchen der Differentialquotient durch eine algebraische Funktion von x ausgedrückt ist.

§. 110.

Wir haben (§. 16.) gesehen, daß, wenn $y = Ax^n + C$, $dy = Anx^{n-1}\,dx$.

Die Differentialgleichung $dy = \alpha x^m\,dx$ stimmt mit der vorhergehenden überein, wenn wir den Coeffizienten $An = \alpha$, und den Exponenten $n - 1 = m$ setzen, woraus $n = m + 1$, und $A = \frac{\alpha}{m+1}$ folgt; das Integral der Differentialgleichung $dy = \alpha x^m\,dx$ ist also $y = \frac{\alpha x^{m+1}}{m+1} + C$. Um also das einsätzige Differential $\alpha x^m\,dx$ zu integriren, so haben wir den Exponenten m um die Einheit zu erhöhen, sodann durch $(m+1)\,dx$ zu dividiren, und die willkürliche Constante C zuzufügen.

Wenn C so zu bestimmen ist, daß, wenn $x = a$, $y = b$, so ist $b = \frac{\alpha a^{m+1}}{m+1} + C$, daher $C = b - \frac{\alpha a^{m+1}}{m+1}$, also das vollständige Integral

$$y = \frac{\alpha x^{m+1}}{m+1} + b - \frac{\alpha a^{m+1}}{m+1} = \frac{\alpha(x^{m+1} - a^{m+1})}{m+1} - b.$$

In dem besondern Falle, wenn $m = -1$, die ursprüngliche Differentialgleichung also $dy = \alpha x^{-1}\,dx = \frac{\alpha dx}{x}$ ist, verwandelt sich die Integralgleichung in

$$y = \frac{\alpha(x^0 - a^0)}{-1+1} + b = \frac{0}{0} + b = \frac{0}{0},$$

y erscheint also unter der Gestalt der Unbestimmtheit; dieses zeigt uns an, daß wir für $m = -1$ das Integral nicht auf die angegebene Art ausdrücken können.

In diesem Falle können wir jedoch das Integral direkt nach §. 19. bestimmen; es folgt nämlich aus

$y = \alpha \log. x + C$, $dy = \frac{\alpha\, dx}{x}$; das Integral von

$dy = \frac{\alpha\, dx}{x}$ ist also $y = \alpha \log. x + C$.

§. 111.

Wir haben §. 11. gesehen, daß

$d(s + t - u + v - w + C) = ds + dt - du + dv - dw$;

es ist also umgekehrt

$\int (ds + dt - du + dv - dw) = s + t - u + v - w + C$,

oder, was dasselbe ist,

$\int (P\,dx + Q\,dx + R\,dx) = \int P\,dx + \int Q\,dx + \int R\,dx + C$.

Wir haben §. 12. gesehen, daß $d(au + C) = a\,du$; es ist also $\int a\,du = a \int du = au + C$, oder, was dasselbe ist, $\int a\,P\,dx + C = a \int P\,dx + C$.

Wenn also $dy = (\alpha^m + \beta x^n + \gamma x^r + \delta x^s + \ldots)\,dx$, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß

$$y = \frac{\alpha\, x^{m+1}}{m+1} + \frac{\beta\, x^{n+1}}{n+1} + \frac{\gamma\, x^{r+1}}{r+1} + \frac{\delta\, x^{s+1}}{s+1} + C.$$

Es sey $dy = (ax + b)^m\,dx$, so ist klar, daß wir die Integration dieser Gleichung vornehmen könnten, indem wir $(ax + b)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelten, und sodann, wie vorhin, die einzelnen Theilsätze integrirten. In dem gegenwärtigen Falle können wir jedoch auf einem kürzeren Wege durch eine schickliche Substitution zum Ziele gelangen, welches Verfahren überhaupt in der ganzen Integralrechnung mit großem Vortheile angewandt wird. Setzen wir nämlich $ax + b = u$, so erhalten wir durch die Differentiation dieser Gleichung $a\,dx = du$, $dx = \frac{du}{a}$; substituiren wir diese Werthe, so ist $dy = \frac{u^m\,du}{a}$, daher

$$y = \frac{u^{m+1}}{a(m+1)} + C = \frac{(ax + b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

Es sey $dy = x^m (b + ax^n)^p dx$; entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze

$$(b + ax^n)^p = b^p + pb^{p-1} ax^n + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2} a^2 x^{2n} + \ldots\ldots + a^p x^{pn},$$ so ist

$$dy = b^p x^m dx + pb^{p-1} ax^{m+n} dx + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2} a^2 x^{2n+m} dx + \ldots\ldots + a^p x^{pn+m} dx,$$

folglich $$y = \frac{b^p x^{m+1}}{m+1} + pb^{p-1} a \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2} a^2 \frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1} + \ldots + a^p \frac{x^{pn+m+1}}{pn+m+1} + C.$$

Die allgemeinste Gleichung, in welcher der Differentialquotient durch eine ganze, rationale Funktion von x ausgedrückt ist, muß von der Gestalt seyn:

$dy = x^m (\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots)^p (\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots)^q (\ldots) dx.$

Entwickeln wir die angedeuteten Potenzen der Vielsätze nach §. 37., und vollziehen wir die angedeuteten Multiplikationen, so werden wir dadurch den Differentialquotienten durch eine endliche Reihe von der Gestalt

$$Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + Dx^{m+3} + \ldots$$

ausgedrückt erhalten, es ist also

$$dy = (Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + Dx^{m+3} + \ldots) dx,$$

folglich

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+2}}{m+2} + \frac{Cx^{m+3}}{m+3} + \frac{Dx^{m+4}}{m+4} + \ldots + \text{const.}$$

§. 112.

Es sey der Differentialquotient eine rationale gebrochene Funktion von x. Die einfachste Differentialgleichung von dieser Art ist $dy = \frac{dx}{a+x}$. Da $\frac{dx}{a+x} = \frac{d(a+x)}{a+x} = d \log. (a + x)$, so ist das verlangte Integral

$$y = \int \frac{dx}{a+x} = \log. (a + x) + C.$$

Setzen wir bx statt x in diese Gleichung, so ist

$$\int \frac{b\,dx}{a+6x} = \log.\,(a+bx) + C,$$

daher $\int \frac{b\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log.\,(a+bx) + c$, welches $c = \frac{C}{b}$ wieder die willkürliche Constante vorstellt. Setzen wir $-b$ statt $+b$, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b}\log.\,(a-bx) + c.$$

Es sey $dy = \frac{dx}{(a+bx)^n}$, und n nicht $= -1$; setzen wir $a+bx = z$, so ist $b\,dx = dz$, $dx = \frac{dz}{b}$, folglich $dy = \frac{dz}{bz^n} = \frac{z^{-n}\,dz}{b}$; es ist also $y = \frac{z^{-n+1}}{b(-n+1)} + C$

$$= -\frac{1}{b(n-1)z^{n-1}} + C = -\frac{1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}} + C.$$

Es sey nun im allgemeinen $dy = \frac{x^m\,dx}{(a+bx)^n}$; setzen wir $a+bx = z$, so ist $x = \frac{z-a}{b}$, daher $dx = \frac{dz}{b}$, und $x^m = \frac{(z-a)^m}{b^m}$

$$= \frac{1}{b^m}\left[z^m - maz^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 z^{m-2} - \ldots\right];$$

es ist also $dy = \frac{(z-a)^m\,dz}{b^{m+1}z^n}$

$$= \frac{1}{b^{m+1}}\left[z^{m-n} - maz^{m-n-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 z^{m-n-2} - \ldots\right]dz,$$

folglich

$$y = \frac{1}{b^{m+1}}\left[\frac{z^{m-n+1}}{m-n+1} - ma\frac{z^{m-n}}{m-n} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2\frac{z^{m-n-1}}{m-n-1} - \ldots\right]$$

+ const., wo überall $z = a+bx$ zu setzen ist. Wenn

$m = n + 1$, oder wenn $m > n + 1$, so wird in der Entwickelung von dy ein Theilsatz vorkommen, in welchem $\frac{dz}{z}$ Faktor ist; in dem Integrale dieses Theilsatzes wird also $\int \frac{dz}{z} = \log. z$ Faktor seyn.

Es sey, z. B., $dy = \frac{x^4\,dx}{(a+bx)^2}$, so ist $m = 4$, $n = 2$, daher

$$dy = \frac{1}{b^5}\left(z^2 - 4az + 6a^2 - \frac{4a^3}{z} + \frac{a^4}{z^2}\right)dz;$$

es ist also

$$y = \frac{1}{b^5}\left(\frac{z^3}{3} - 2az^2 + 6a^2z - 4a^3 \log. z - \frac{a^4}{z}\right) + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{b^5}\left[\frac{(a+bx)^3}{3} - 2a\,(a+bx)^2 + 6a^2\,(a+bx) - 4a^3\,\log.\,(a+bx) - \frac{a^4}{a+bx}\right] + \text{const.}$$

§. 113.

Es sey das Integral von $\frac{dx}{x^2-a^2}$ zu bestimmen. Aus §. 97. folgt, daß $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$, es ist also

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\log.\,(x-a) - \frac{1}{2a}\log.\,(x+a) + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2a}\log.\frac{x-a}{x+a} + \text{const.}$$

Setzen wir überall $bx + c$ statt x, so ist $d\,(bx+c) = b\,dx$ statt dx, und $(bx+c)^2 = b^2x^2 + 2bcx + c^2$ statt x^2 zu setzen; wir erhalten also, nachdem wir die beiden Glieder durch b dividirt haben,

$$\int \frac{dx}{b^2x^2+2bcx+c^2-a^2} = \frac{1}{2ab}\log.\frac{bx+c-a}{bx+c+a} + \text{const.}$$

Setzen wir, um abzukürzen, $b^2 = \alpha$, $2bc = \beta$, $c^2 - a^2 = \gamma$, so folgt daraus $b = \sqrt{\alpha}$, $c = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$, $z = \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}$; es ist also $\int \frac{dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \log. \frac{x\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}}{x\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \log. \frac{2\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha x + \beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} + \text{const.} \quad (1)$$

Dieses Integral erscheint unter einer imaginären Gestalt, wenn $\beta^2 < 4\alpha\gamma$; bemerken wir nun, daß $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{-1}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}$, und daß im allgemeinen $\log. \frac{m}{n} = -\log. \frac{n}{m}$, so erhalten wir $\int \frac{dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = -$

$$\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{2\alpha x + \beta + \sqrt{-1}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha x + \beta - \sqrt{-1}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} + \text{const.}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha x + \beta}\sqrt{-1}}{1 - \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha x + \beta}\sqrt{-1}} + \text{const.}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \text{tg. } \varphi\sqrt{-1}}{1 - \text{tg. } \varphi\sqrt{-1}} + \text{const.},$$

indem wir $\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha x + \beta} = \text{tg. } \varphi$, also $\varphi = \text{arc. tg. } \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha x + \beta}$ $= \text{arc. cot. } \frac{2\alpha x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}$ setzen. Nun ist aber nach §. 102.

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \text{tg. } \varphi\sqrt{-1}}{1 - \text{tg. } \varphi\sqrt{-1}} = \varphi; \text{ es ist also } \int \frac{dx}{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \text{ arc. cot. } \frac{2\alpha x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} + \text{const.}$$

Dieses Integral können wir auch anders anschreiben; addiren und subtrahiren wir $\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\frac{\pi}{2}$, und bemerken wir, daß

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc. cot.}\ \frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} = \text{arc. tg.}\ \frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}};$$

rechnen wir sodann die beständige Größe $-\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\frac{\pi}{2}$ in die Constante ein, welche dadurch eine andere wird, so ist

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\,\text{arc. tg.}\,\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \text{const. (2).}$$

Es ist die Formel 1 anzuwenden, wenn $\beta^2 > 4\,\alpha\gamma$; dagegen die Formel 2, wenn $\beta^2 < 4\,\alpha\gamma$.

Wenn $\beta^2 = 4\,\alpha\gamma$, d. h., wenn $\beta = 2\sqrt{\alpha\gamma}$, so ist $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma} = 0$; die beiden Formeln sind dann zur Berechnung dieses Integrals nicht mehr anwendbar. Es ist aber jetzt

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha x^2+2\sqrt{\alpha\gamma}\,x+\gamma = (x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2,$$

daher

$$\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \int\frac{dx}{(x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,(x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})}$$

+ const., welches Integral wir erhalten, indem wir in die entsprechende Formel des §. 112. $a = \sqrt{\gamma}$, $b = \sqrt{\alpha}$, und $n = 2$ setzen.

§. 114.

Es ist $d\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma) = \frac{d(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

$$= \frac{2\alpha x\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \frac{\beta\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}, \text{ daher } \frac{x\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\,d\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma) - \frac{\beta}{2\alpha}\,\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma};$$

es ist also $\int\frac{x\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{2\alpha}\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \text{const.}$$

Es ist $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = A\int \frac{x\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

$+ B\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{A}{2\alpha}\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$

$+ \frac{2\alpha B-\beta A}{2\alpha}\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \text{const.}$

Wenn also $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, so ist (§. 113.)

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{A}{2\alpha}\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$$+ \frac{2\alpha B-\beta A}{2\alpha\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\log.\frac{2\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}} + \text{const.};$$

wenn $\beta^2 < 4\alpha\gamma$, so ist

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{A}{2\alpha}\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$$+ \frac{2\alpha B-\beta A}{\alpha\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\text{arc. tg.}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \text{const.};$$

wenn $\beta^2 = 4\alpha\gamma$, so ist

$$\int \frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{A}{2\alpha}\log.(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$$- \frac{2\alpha B-\beta A}{2\alpha\sqrt{\alpha}(x\sqrt{\alpha}+\gamma)} + \text{const.}$$

§. 115.

Es stelle nun im allgemeinen $\frac{P}{N}$ eine gebrochene rationale Funktion von x vor, und es sey $\int \frac{P}{N}\,dx$ zu bestimmen. Wenn der höchste Exponent von x in P größer ist, als der höchste Exponent von x in N, so dividiren wir P durch N, bis wir zu einem Reste M gelangen, in welchem der höchste Exponent von x kleiner ist, als in N; es stelle Q den erhaltenen ganzen Quotienten vor, so ist $\frac{P}{N} = Q + \frac{M}{N}$, daher $\int \frac{P}{N}\,dx = \int Q\,dx + \int \frac{M}{N}\,dx$; da

wir nun nach §. 111. $\int Q\,dx$ leicht bestimmen können, so wollen wir jetzt sehen, auf welche Weise wir $\int \frac{M}{N}\,dx$ finden.

Es bestehe N aus dem Produkte der Faktoren $(x-a)^n \ldots x-b, x-c, \ldots (x-\alpha)^2+\beta^2, (x-\alpha')^2+\beta'^2 \ldots$, (ein jeder dieser Faktoren von dem zweiten Grade ist das Produkt zweier zusammengehörender imaginären Faktoren von dem ersten Grade). Zerlegen wir nun nach §. 99., 100. und 101. $\frac{M}{N}$ in eine Summe von Brüchen, von welchen die obigen Faktoren die Nenner sind, so erhalten wir

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{F}{x-a}$$
$$+ \frac{G}{x-b} + \frac{H}{x-c} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{A'x+B'}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A''x+B''}{(x-\alpha')^2+\beta'^2} + \ldots\ldots\ldots$$

Es ist jetzt $\int \frac{M}{N}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

$$+ B\int \frac{dx}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + F\int \frac{dx}{x-a}$$
$$+ G\int \frac{dx}{x-b} + H\int \frac{dx}{x-c} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int \frac{(A'x+B')dx}{(x-\alpha')^2+\beta'^2} + \int \frac{(A''x+B'')dx}{(x-\alpha')^2+\beta'^2} + \ldots\ldots + \text{const.};$$

ein jedes der Integrale in dem zweiten Gliede dieser Gleichung bestimmen wir nun leicht nach den §. 112., 113. und 114.

Beispiel. Es sey $\int \frac{x^4\,dx}{x^5-x^4-x+1}$ zu bestimmen. Es ist $x^5-x^4-x+1=(x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)$; setzen wir also

$$\frac{x^4}{x^5-x^4-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Um vorerſt A und B zu beſtimmen, ſo bemerken wir, daß hier das $V = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}$, und $\frac{dV}{dx}$
$= \frac{4x^3(x+1)(x^2+1) - x^4(3x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$;
ſetzen wir 1 ſtatt x, ſo erhalten wir $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{5}{8}$.

Um C zu beſtimmen, ſo bemerken wir, daß hier das entſprechende $M = x^4$, und $N = (x-1)^2(x^2+1)$;
ſetzen wir alſo -1 ſtatt x in $\frac{M}{N}$, ſo erhalten wir $C = \frac{1}{8}$.

Um nun D und E zu beſtimmen, ſo bemerken wir, daß die einfachen Faktoren von x^2+1, $x - \sqrt{-1}$ und $x + \sqrt{-1}$ ſind; es iſt alſo gegenwärtig $\alpha = 0$, $\beta = 1$; ſetzen wir $\sqrt{-1}$ ſtatt x in $M = x^4$, ſo verwandelt ſich M in $+1$; es iſt alſo $u = +1$, und $u' = 0$; ſetzen wir eben ſo $\sqrt{-1}$ ſtatt x in
$\frac{dN}{dx} = \frac{d[(x-1)^2(x+1)]}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$,
ſo verwandelt ſich daſſelbe in
$$-3 - 2\sqrt{-1} - 1 = -4 - 2\sqrt{-1};$$
es iſt alſo $v = -4$, $v = -2$; ſubſtituiren wir dieſe Werthe, ſo erhalten wir
$uv + u'v' = -4$, $uv' - u'v = -2$, $v^2 + v'^2 = 20$,
daher $\frac{Dx+E}{x^2+1} = \frac{-8x-4}{20(x^2+1)} = -\frac{2x+1}{5(x^2+1)}$.

Es iſt alſo $\int \frac{x^4\,dx}{x^5-x^4-x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2}$
$+ \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+1}$
$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8}\log.(x-1) + \frac{1}{8}\log.(x+1)$
$- \frac{1}{5}\log.(x^2+1) - \frac{1}{5}\text{arc. tg. } x + \text{const.}$

Die ersten Integralen bestimmten wir nach §. 112.; $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+1}$ bestimmten wir nach der zweiten Formel des §. 114., in welcher gegenwärtig $A = 2$, $B = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 1$ zu setzen ist.

§. 116.

Es sey das Integral von $\frac{u^m\,du}{bu^n \mp c}$ zu bestimmen.

Setzen wir dieses Differential unter die Gestalt $\frac{1}{b}\,\frac{u^m\,du}{u^n \mp \frac{c}{b}}$; setzen wir $\frac{c}{b} = a^n$, und $u = ax$, so verwandelt sich dieses Differential in $\frac{1}{ba^{n-m-1}}\,\frac{x^m\,dx}{x^n \mp 1}$; es ist also $\int \frac{u^m\,du}{bu^n \mp c} = \frac{1}{ba^{n-m-1}} \int \frac{x^m\,dx}{x^n \mp 1}$; wir haben uns also nur mit der Bestimmung des letztern Integrals zu befassen.

Wir haben (§. 108.) gesehen, daß, wenn wir $\frac{x^m}{x^n \mp 1}$ (indem wir daselbst $a = 1$ setzen) in seine einfachen Brüche zerlegen wollen, deren Nenner die reellen Theiler von dem ersten und zweiten Grade von $x^n \mp 1$ sind, ein Bruch, dessen Nenner vom zweiten Grade ist, im allgemeinen ausgedrückt ist durch

$$\frac{2}{n}\,\frac{x\cos.(n-m-1)\varphi - a\cos.(n-m)\varphi}{x^2 - 2x\cos.\varphi + 1};$$

wenn das obere Zeichen gilt, so ist $\varphi = \frac{2i\pi}{n}$, wenn aber das untere Zeichen gilt, so ist $\varphi = \frac{(2i+1)\pi}{n}$. Um nun

$$\frac{2}{n} \int \frac{x\cos.(n-m-1)\,\varphi - \cos.(n-m)\varphi}{x^2 - 2x\cos.\varphi + 1}\,dx$$

zu bestimmen, so setzen wir, um dieses Integral mit dem Integral von §. 114. in Übereinstimmung zu bringen,
$A = \cos.(n-m-1)\varphi$, $B = -\cos(n-m)\varphi$, $\alpha = 1$,
$\beta = -2\cos.\varphi$, $\gamma = 1$, und erhalten so

$$\frac{2}{n}\int \frac{x\cos.(n-m-1)\varphi - \cos.(n-m)\varphi}{x^2 - 2x\cos.\varphi + 1}\,dx$$

$$= \frac{\cos.(n-m-1)\varphi}{n}\log.(x^2 - 2x\cos.\varphi + 1)$$

$$- \frac{2}{n}\,\frac{[\cos.(n-m)\varphi - \cos.\varphi\cos.(n-m-1)\varphi]}{\sin.\varphi}$$

$\text{arc. tg.}\,\frac{x-\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$. Es ist aber

$\cos.(n-m)\varphi = \cos.\varphi\cos.(n-m-1)\varphi - \sin.\varphi\sin.(n-m-1)\varphi$,
daher

$$\frac{\cos.(n-m)\varphi - \cos.\varphi\cos.(n-m-1)\varphi}{\sin.\varphi} = -\sin.(n-m-1)\varphi;$$

substituiren wir diesen Werth, so ist

$$\frac{2}{n}\int \frac{x\cos.(n-m-1)\varphi - \cos.(n-m)\varphi}{x^2 - 2x\cos.\varphi + 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\cos.(n-m-1)\varphi\log.(x^2 - 2x\cos.\varphi + 1)$$

$$+ \frac{2}{n}\sin.(n-m-1)\varphi\ \text{arc. tg.}\,\frac{x-\cos.\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Es sey vorerst der Nenner $x^n - 1$. Wenn n gerade ist, so hat $x^n - 1$ die zwei reellen Faktoren $x - 1$ und $x + 1$; die Zähler A und B derselben bestimmen wir, indem wir $M = x^m$ und $\frac{dN}{dx} = nx^{n-1}$ vorerst $+1$ statt x, und sodann -1 statt x setzen; es ist also

$A = \frac{1}{n}$, $B = \frac{(-1)^m}{n}$, und $\int \frac{A\,dx}{x-1} = \frac{1}{n}\log.(x-1)$,

$\int \frac{B\,dx}{x+1} = \frac{(-1)^m}{n}\log.(x+1)$.

Wenn n ungerade ist, so hat $x^n - 1$ nur den einzigen reellen Faktor von dem ersten Grade $x - 1$; den

Zähler A des Bruches $\frac{A}{x-1}$ finden wir jetzt wie vorhin $= \frac{1}{n}$, und eben so $\int \frac{A\,dx}{x-1} = \frac{1}{n} \log.(x-1)$.

Es sey, z. B., $\int \frac{x^3\,dx}{x^5-1}$ zu bestimmen, also $m=3$, $n=5$, und $\varphi = \frac{2i\pi}{5}$.

Das Integral des Bruches $\frac{1}{5}\,\frac{dx}{x-1}$ ist $\frac{1}{5} \log.(x-1)$; das Integral der beiden Brüche, deren Zähler von dem zweiten Grade sind, finden wir, indem wir in $\varphi = \frac{2i\pi}{5}$ zuerst $i = 1$ und sodann $i = 2$ setzen; wir erhalten also

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^5-1} = \frac{1}{5} \log.(x-1)$$
$$+ \frac{1}{5} \cos.\frac{2}{5}\pi \log.(x^2 - 2x \cos.\frac{2}{5}\pi + 1)$$
$$+ \frac{1}{5} \cos.\frac{4}{5}\pi \log.(x^2 - 2x \cos.\frac{4}{5}\pi + 1)$$
$$+ \frac{2}{5} \sin.\frac{2}{5}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x - \cos.\frac{2}{5}\pi}{\sin.\frac{2}{5}\pi}$$
$$+ \frac{2}{5} \sin.\frac{4}{5}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x - \cos.\frac{4}{5}\pi}{\sin.\frac{4}{5}\pi} + \text{const.}$$

Es sey nun der Nenner $x^n + 1$.

Wenn n gerade ist, so hat $x^n + 1$ keinen reellen Theiler von dem ersten Grade; wir bestimmen also die Integrale sämmtlicher einfacher Brüche, in welche wir $\frac{x^m}{x^n+1}$ zerlegen, und deren Nenner von dem zweiten Grade sind, aus der vorhin aufgefundenen allgemeinen Formel, indem wir in $\varphi = \frac{(2i+1)\pi}{n}$ nach und nach i alle ganzen Werthe geben von $i = 0$ an bis zu $i = \frac{n-2}{2}$.

Wenn n ungerade ist, so hat $x^n + 1$ den einzigen reellen Theiler $x + 1$; den Zähler A des einfachen Bruches, welcher diesen Nenner hat, bestimmen wir, indem wir -1 statt x in $M = x^m$ und $\frac{dN}{dx} = nx^{n-1}$ setzen; es ist

also $A = \frac{(-1)^m}{n}$, daher das Integral des entsprechenden einfachen Bruches $= \frac{(-1)^m}{n} \log. (x+1)$; die Integrale der übrigen Brüche, deren Nenner von dem zweiten Grade sind, bestimmen wir aus der allgemeinen Integralformel, indem wir in $\varphi = \frac{(2i+1)\pi}{n}$ nach und nach i alle ganzen Werthe geben von $i = o$ an bis zu $i = \frac{n-3}{2}$.

Es sey $\int \frac{x^4\,dx}{x^6+1}$ zu bestimmen; setzen wir in der allgemeinen Formel $m = 4$, $n = 6$, und nach und nach $i = o$, $i = 1$, $i = 2$, so erhalten wir, indem wir bemerken, daß $\cos. \frac{3}{6}\pi = o$, $\sin. \frac{3}{6}\pi = 1$, $\int \frac{x^4}{x^6+1}$

$$= \frac{1}{6} \cos. \frac{1}{6}\pi \log. (x^2 - 2x \cos. \frac{1}{6}\pi + 1)$$
$$+ \frac{2}{6} \sin. \frac{1}{6}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x - \cos. \frac{1}{6}\pi}{\sin. \frac{1}{6}\pi} + \frac{2}{6} \text{ arc. tg } x$$
$$+ \frac{1}{6} \cos. \frac{5}{6}\pi \log. (x^2 - 2x \cos. \frac{5}{6}\pi + 1)$$
$$+ \frac{2}{6} \sin. \frac{5}{6}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x - \cos. \frac{5}{6}\pi}{\sin. \frac{5}{6}\pi} + \text{const.}$$

Wenn $m = n - 1$, so können wir das Integral mit Leichtigkeit direkt bestimmen; es ist dann nämlich $\frac{x^{n-1}dx}{x^n \mp 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}dx}{x^n \mp 1}$; da nun der Zähler $nx^{n-1}dx$ das Differential des Nenners $x^n \mp 1$ ist, so ist

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n \mp 1} = \frac{1}{n} \log. (x^n \mp 1) + \text{const.}$$

§. 117.

Um das Integral der Brüche, welche von der Gestalt

(§. 100.) $\frac{(Cx + D)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}$ zu bestimmen, so setzen wir

$x - \alpha = u$, also $x = u + \alpha$, $dx = du$, woraus

$$\int \frac{(Cx + D)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} = \int \frac{(Cu + C\alpha + D)\,du}{(u^2+\beta^2)^p}$$

$$= C\int \frac{u\,du}{(u^2+\beta^2)^p} + (D + C\alpha)\int \frac{du}{(u^2+\beta^2)^p}$$ folgt.

Setzen wir $u^2 + \beta^2 = z$, so ist $2\,udu = dz$,

$$udu = \frac{1}{2}\,dz,\ C\int \frac{u\,du}{(u^2+\beta^2)^p} = \frac{C}{2}\int \frac{dz}{z^p}$$

$$= -\frac{C}{2\,(p-1)z^{p-1}} = -\frac{C}{2\,(p-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}}.$$

Wir werden später noch sehen (§. 128.), auf welche Weise wir den andern Theil des Integrals, nämlich $\int \frac{du}{(u^2+\beta^2)^p}$ bestimmen. Daselbst werden wir auch sehen, auf welche Weise wir $\int \frac{x^m\,dx}{(x^n \mp a^n)^p}$ bestimmen.

§. 118.

Wir gehen nun zu der Integration derjenigen Differentialgleichungen über, bei welchen in dem Ausdrucke des Differentialquotienten irrationale Funktionen von x enthalten sind.

Wir haben (§. 110.) gesehen, daß $\int \alpha x^m\,dx = \frac{\alpha x^{m+1}}{m+1} + C$; da diese Integralformel für einen jeden Werth von m richtig ist, so gilt sie auch, wenn m gebrochen ist. Hiernach können wir also die Integration vornehmen, wenn der Ausdruck des Differentialquotienten nur aus einer Summe von irrationalen Einsätzen besteht.

Es sey, z. B., $dy = (a\sqrt{x} - b\sqrt[3]{x^2} + c\sqrt[4]{x^3})\,dx$

$= (ax^{\frac{1}{2}} - bx^{\frac{2}{3}} + cx^{\frac{3}{4}})\,dx$, so ist

$$y = \frac{2}{3}\,ax^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}\,bx^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}\,cx^{\frac{7}{4}} + \text{const.}$$

$$= \frac{2}{3}\,a\sqrt{x^3} - \frac{3}{5}\,b\sqrt[3]{x^5} + \frac{4}{7}\,c\sqrt[4]{x^7} + \text{const.}$$

§. 119.

Das Verfahren, dessen wir uns zu der Bestimmung der gegenwärtigen Integrale im allgemeinen bedienen, besteht darin, durch eine schickliche Substitution statt x die Differentialgleichung in eine andere umzuwandeln, in welcher nur rationale Funktionen der neuen veränderlichen Größe vorkommen, und welche wir daher nach dem Vorhergehenden immer zu integriren im Stande sind; setzen wir dann in das gefundene Integral statt der substituirten veränderlichen Größe wieder ihren durch eine Funktion von x ausgedrückten Werth, so erhalten wir dadurch das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung.

Wenn in dem Differentialquotienten nur Wurzeln von Einsätzen vorkommen, so setzen wir x gleich einer Potenz von z, deren Exponent durch die Grade dieser Wurzelzeichen theilbar ist; die Differentialgleichung wird dadurch in eine andere umgewandelt werden, welche in Bezug auf z rational ist.

Es sey, z. B., $dy = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx$; setzen wir

$x = z^6$, so ist $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, und $dx = 6z^5\,dx$; substituiren wir diese Werthe, so ist

$dy = \dfrac{z^3 + z^2}{z^3 - z^2} \cdot 6z^5\,dz = \dfrac{6\,(z^6 + z^5)\,dz}{z - 1}$; es ist

$$\frac{z^6 + z^5}{z-1} = z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 2 + \frac{2}{z-1},$$

daher $dy = 6(z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 2)\,dz + \frac{12\,dz}{z-1}$, folglich $y = 6\left(\frac{z^6}{6} + \frac{2z^5}{5} + \frac{z^4}{2} + \frac{2z^3}{3} + z^2 + 2z\right) + 12 \log.(z-1) + \text{const.}$; setzen wir statt z wieder seinen Werth $\sqrt[6]{x}$, so erhalten wir das gesuchte Integral

$$y = 6\left(x + \frac{2\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{2\sqrt{x}}{3} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}\right) + 12 \log.(\sqrt[6]{x} - 1) + \text{const.}$$

§. 120.

Es komme in dem Differentialquotienten keine andere irrationale Funktion von x vor, als $\sqrt[n]{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}$, oder auch Potenzen derselben.

Setzen wir $\sqrt[n]{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}} = z$, so ist $\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} = z^n$, $\alpha + \beta x = (\gamma + \delta x)\,z^n$, daher $x = \frac{\gamma z^n - \alpha}{\beta - \delta z^n}$, folglich

$$dx = \frac{n\gamma z^{n-1}(\beta - \delta z^n)\,dz + n\delta z^{n-1}(\gamma z^n - \alpha)\,dz}{(\beta - \delta z^n)^2}$$

$$= \frac{n(\beta\gamma - \alpha\delta)\,z^{n-1}\,dz}{(\beta - \delta z^n)^2};$$

substituiren wir nun statt $\sqrt[n]{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}$, x und dx ihre Werthe in die Differentialgleichung, so wird dieselbe in Bezug auf z unter einer rationalen Gestalt erscheinen.

Es sey, z. B., $dy = \sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}} \cdot \frac{dx}{x}$; setzen wir also $\sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}} = z$, so ist $n = 2$, $x = \frac{\gamma z^2 - \alpha}{\beta - \delta z^2}$,

$$dx = 2(\beta\gamma - \alpha\delta) \cdot \frac{z\,dz}{(\beta - \delta z)^2}, \text{ folglich}$$

$$dy = 2(\beta\gamma - \alpha\delta)\,\frac{z^2\,dz}{(\gamma z^2 - \alpha)(\beta - \delta z^2)}.$$

Setzen wir $\frac{z^2}{(\gamma z^2-\alpha)(\beta-\delta z^2)} = \frac{A}{\gamma z^2-\alpha} + \frac{B}{\beta-\delta z^2}$,

so finden wir (§. 97.) $A = \frac{\alpha}{\beta\gamma-\alpha\delta}$, $B = \frac{\beta}{\beta\gamma-\alpha\delta}$; substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir $dy = \frac{2\alpha\,dz}{\gamma z^2-\alpha} + \frac{2\beta\,dz}{\beta-\delta z^2}$. Es ist nach §. 113.

$\int\frac{dz}{\gamma z^2-\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\log.\frac{2\gamma z-2\sqrt{\alpha\gamma}}{2\gamma z+2\sqrt{\alpha\gamma}}$, indem wir z statt x, γ statt α, o statt β, und $-\alpha$ statt γ in die erste Formel dieses §. setzen, und

$\int\frac{dz}{\beta-\delta z^2} = \frac{1}{2\sqrt{\beta\delta}}\log.\frac{-2\delta z-2\sqrt{\beta\delta}}{-2\delta z+2\sqrt{\beta\delta}}$, indem wir z statt x, $-\delta$ statt α, o statt β, und β statt γ in dieselbe Formel setzen; substituiren und reduziren wir, so ist

$y = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\log.\frac{z\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha}}{z\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\log.\frac{z\sqrt{\delta}+\sqrt{\beta}}{z\sqrt{\delta}-\sqrt{\beta}}$ + const.; setzen wir statt z wieder seinen Werth, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen

$$y = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\log.\frac{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta x)}-\sqrt{\alpha(\gamma+\delta x)}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta x)}+\sqrt{\alpha(\gamma+\delta x)}} + \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\log.\frac{\sqrt{\delta(\alpha+\beta x)}+\sqrt{\beta(\gamma+\delta x)}}{\sqrt{\delta(\alpha+\beta x)}-\sqrt{\beta(\gamma+\delta x)}} + \text{const.}$$

Es sey $dy = x^m\sqrt[n]{\alpha+\beta x}\,.\,dx$.

Um die allgemein vorgestellte Wurzelgröße mit der gegenwärtigen in Übereinstimmung zu bringen, so haben wir in jener $\gamma = 1$, $\delta = o$ zu setzen; es wird dadurch $\sqrt[n]{\alpha+\beta x} = z$, $x = \frac{z^n-\alpha}{\beta}$, und $dx = \frac{nz^{n-1}\,dz}{\beta}$, daher $dy = \frac{nz^n(z^n-\alpha)^m}{\beta^{m+1}}\,dz$; dy ist also rational in Bezug auf z ausgedrückt.

Es sey, z. B., $dy = x\sqrt{\alpha + \beta x}\,.\,dx$, so ist $m = 1$, $n = 2$, daher $dy = \frac{2z^2(z^2-\alpha)}{\beta^2}dz$

$= \frac{2z^4\,dz}{\beta^2} - \frac{2\alpha z^2\,dz}{\beta^2}$, daher $y = \frac{2z^5}{5\beta^2} - \frac{2\alpha z^3}{3\beta^2}$ + const., folglich, indem wir statt z wieder seinen Werth setzen, $y = \frac{2\sqrt{(\alpha+\beta x)^5}}{5\beta^2} - \frac{2\alpha\sqrt{(\alpha+\beta x)^3}}{3\beta^2}$ + const.

§. 121.

Angenommen nun, daß in dem Differentialquotienten keine andere irrationale Funktion von x, als eine von der Gestalt $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ vorkomme.

Setzen wir $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = x\sqrt{\alpha} + z$, erheben wir zum Quadrate, und lassen wir auf beiden Seiten αx^2 weg, so ist $\beta x + \gamma = 2xz\sqrt{\alpha} + z^2$, $x = \frac{z^2-\gamma}{\beta - 2z\sqrt{\alpha}}$,

$dx = \frac{2z\,dz\,(\beta - 2\sqrt{\alpha}.z) + 2\,dz\sqrt{\alpha}\,(z^2-\gamma)}{(\beta - 2z\sqrt{\alpha})^2}$

$= \frac{2\,dz\,(\beta z - z^2\sqrt{\alpha} - \gamma\sqrt{\alpha})}{(\beta - 2z\sqrt{\alpha})^2}$; $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = x\sqrt{\alpha} + z$

$= \frac{(z^2-\gamma)\sqrt{\alpha}}{\beta - 2z\sqrt{\alpha}} + z = \frac{\beta z - z^2\sqrt{\alpha} - \gamma\sqrt{\alpha}}{(\beta - 2z\sqrt{\alpha})^2}$.

Setzen wir jetzt statt $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, x und dx ihre Werthe, so wird die Differentialgleichung in Bezug auf z unter einer rationalen Gestalt erscheinen; nach erfolgter Integration derselben setzen wir wieder

$$z = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - x\sqrt{\alpha}.$$

Es sey, z. B., $dy = \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$, so ist nach den gehörigen Substitutionen und Reduktionen

$dy = \frac{2\,dz}{\beta - 2z\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{-2\,dz}{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - 2z}$;

da nun der Zähler $-2\,dz$ das Differential des Nenners $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - 2z$ ist, so ist $y = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - 2z\right)$ $+$ const. $= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \frac{1}{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - 2z} +$ const.; setzen wir statt z wieder seinen Werth, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \frac{1}{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2x\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} + \text{const.};$$

multipliziren wir den Zähler und den Nenner des Bruches unterhalb des Logarithmen durch

$$\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2x\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma},$$

so wird dadurch der Nenner nach den gehörigen Reduktionen sich in $\frac{\beta^2}{\alpha} - 4\gamma$ verwandeln, und es ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2x\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - 4\gamma\right) + \text{const.} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2x\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) + \text{const.},$$

indem wir $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log. \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - 4\gamma\right)$ in die willkürliche Constante einrechnen, welche dadurch eine andere wird.

Wenn α negativ ist, so ist $y = \int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. \left(2\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma} + \sqrt{-1}\left(2x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$

$+$ const., indem wir bemerken, daß

$$\frac{\beta}{\sqrt{-\alpha}} = \frac{\beta}{\sqrt{-1}\sqrt{\alpha}} = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{-1}.$$

Setzen wir tg. $\varphi = \frac{2x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{2\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$, d. i.,

$\varphi = \text{arc. tg.} \frac{2x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{2\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$, so ist $1 + \text{tg. } \varphi^2 =$

$$\text{sec. } \varphi^2 = \frac{1}{\cos. \varphi^2} = 1 + \frac{4\alpha x^2 - 4\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha}}{4(-\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$$

$$= \frac{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma}{4(-\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}, \text{ daher } \cos. \varphi^2 = \frac{4(-\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma},$$

folglich $\sin. \varphi^2 = 1 - \cos. \varphi^2 =$

$$\frac{\left(4\alpha x^2 - 4\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)}{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma} = \frac{\left(2x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma}; \text{ es ist also}$$

$$\cos. \varphi \cdot \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma} = 2\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma},$$

$$\sin. \varphi \cdot \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma} = 2x\sqrt{\alpha} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}; \text{ subſtituiren}$$

wir dieſe Werthe, ſo iſt $\int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. \left[\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma} (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi)\right]$$

$$+ \text{ const.} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\gamma} + \text{ const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{-1}} \log. (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi) + \text{const.}, \text{ in-}$$

dem wir den beſtändigen Theil des Integrals in die willkürliche Conſtante einrechnen. Es iſt aber (§. 102.)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi)=\varphi=\text{arc. tg.}\frac{2x\sqrt{\alpha}-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{2\sqrt{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$$=\text{arc. tg.}\frac{2\alpha x-\beta}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}},\ \text{daher}\int\frac{dx}{\sqrt{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\text{ arc. tg.}\frac{2\alpha x-\beta}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\text{ arc. sin.}\frac{2\alpha x-\beta}{\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}}+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\text{ arc. cos.}\frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}}+\text{const.}$$

Es sey, z. B., $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu bestimmen.

Es ist hier $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$, daher

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc. tg.}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\text{const.}$$

$=$ arc. sin. x + const. $=$ arc. cos. $\sqrt{1-x^2}$ + const., wie wir schon §. 26. durch die direkte Differentiation gefunden haben.

§. 122.

Es sey nun $dy=\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$.

Diese Gleichung verwandelt sich nach den gehörigen Substitutionen und Reduktionen in $dy=\frac{2\,dz}{z^2-\gamma}$; es ist

also $y=2\int\frac{dz}{z^2-\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log.\frac{z-\sqrt{\gamma}}{z+\sqrt{\gamma}}+\text{const.}$,

indem wir in die erste Formel von §. 113. z statt x, $-\gamma$ statt γ, 0 statt β, und 1 statt α substituiren; setzen wir statt z wieder seinen Werth, so ist $y=\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log.\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}-x\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}-x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}+\text{const.}$$

Multipliziren wir den Zähler und den Nenner des Bruches unter dem Logarithmen durch $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+x\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}$, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log. \frac{x(\beta-2\sqrt{\alpha\gamma})}{\beta x+2\gamma+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log. \frac{x}{\beta x+2\gamma+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \text{const.};$$

indem wir uns das beständige $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log. (\beta - 2\sqrt{\alpha\gamma})$ der willkürlichen Constante zugefügt denken.

Wenn γ negativ ist, so erscheint dieses Integral unter einer imaginären Gestalt; wir könnten dann zwar dasselbe wieder nach §. 102. unter eine reelle Gestalt bringen, wir gelangen aber auf einem kürzeren Wege zum Ziele, indem wir bemerken, daß dann $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x-\gamma}}$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2+\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc. tg. } \frac{z}{\sqrt{\gamma}} + \text{const.} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc. tg. } \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x-\gamma}-x\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} + \text{const.},$$

indem wir in die zweite Formel des §. 113. z statt x, 1 statt α, o statt β, und γ statt γ setzen.

§. 123.

Es ist $d[x^{m-1}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)] =$

$$(m-1)x^{m-2}dx\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \frac{1}{2}\frac{x^{m-1}dx(2\alpha x+\beta)}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$=$ (indem wir unter einerlei Benennung bringen)

$$\frac{m\alpha x^m dx + \left(m-\frac{1}{2}\right)\beta x^{m-1}dx + (m-1)\gamma x^{m-2}dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}};$$

es ist also $\frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = \frac{d(x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})}{m\alpha}$

$$-\frac{(m-\frac{1}{2})\beta}{m\alpha}\cdot\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}-\frac{(m-1)\gamma}{(m+1)\alpha}\cdot\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}},$$

folglich $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}=\frac{x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{m\alpha}$

$$-\frac{(m-\frac{1}{2})\beta}{m\alpha}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}-\frac{(m-1)\gamma}{m\alpha}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$+$ const. .... (1).

Setzen wir in dieser Gleichung $m=1$, so ist $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

$=\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{\alpha}-\frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+$ const.; setzen wir $m=2$, so ist $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}=\frac{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{2\alpha}$

$$-\frac{3\beta}{4\alpha}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}-\frac{\gamma}{2\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{ const.}$$

$$=\frac{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{2\alpha}-\frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha^2}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

$$+\left(\frac{3\beta^2}{8\alpha^2}-\frac{\gamma}{2\alpha}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{ const.; setzen wir } m=3,$$

so erhalten wir $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}=\frac{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{3\alpha}$

$$-\frac{5}{6}\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}-\frac{2\gamma}{3\alpha}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{ const.}$$

$$=\frac{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{3\alpha}-\frac{5\beta}{18\alpha^2}x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

$$+\left(\frac{5}{8}\frac{\beta^2}{\alpha^3}-\frac{2\gamma}{3\alpha^2}\right)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

$$-\left[\frac{5}{6}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{3}{8}\frac{\beta}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{2\alpha}\right)-\frac{\beta\gamma}{3\alpha^2}\right]\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{ const.,}$$

und so führen wir im allgemeinen $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ auf andere schon bestimmte Integrale zurück, wenn m eine ganze und positive Zahl ist.

Um $\int dx \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ zu bestimmen, so bemerken wir, daß $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, es ist also

$$\int dx \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \alpha \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$$+ \beta \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \gamma \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}};$$

substituiren wir die vorhin gefundenen Werthe, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen $\int dx \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{(2\alpha x+\beta)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{4\alpha}$

$$- \frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{8\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \text{const.}$$

Auf dieselbe Weise bestimmen wir nun im allgemeinen $\int x^m dx \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$.

Setzen wir in der Gleichung (1) $m-2 = -n$, also $m = -(n-2)$, und nehmen wir sodann den Werth von $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = -\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{(n-1)\gamma x^{n-1}}$

$$- \frac{(n-2)\alpha}{(n-1)\gamma} \int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$$- \frac{(2n-3)\beta}{2(n-1)\gamma} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \text{const.}$$

Für $n = 1$ wird das zweite Glied der Gleichung unendlich groß, es kann also $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ nicht auf diese Weise bestimmt werden; dieses Integral haben wir aber schon in dem vorigen §. direkt bestimmt.

Setzen wir $n = 2$, so erhalten wir $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{\gamma x} - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + \text{const.};$$

setzen wir $n = 3$, so erhalten wir $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{2\gamma x^2} - \frac{\alpha}{2\gamma} \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

$$-\frac{3\beta}{4\gamma}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}=-\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{2\gamma x^2}+\frac{3\beta}{4\gamma^2}\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{x}$$

$$+\left(\frac{3\beta^2}{8\gamma^2}-\frac{\alpha}{2\gamma}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}+\text{const.}$$

, und so bringen wir im allgemeinen $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ auf andere schon bestimmte Integrale zurück, wenn n eine ganze und positive Zahl ist.

§. 124.

Wenn es uns durch keine Substitution statt x gelingt, eine gegebene irrationale Differentialgleichung unter eine rationale Gestalt zu bringen, so ist es auch nicht möglich, dieses Integral unter einer bekannten endlichen Gestalt zu bestimmen, d. h., dasselbe durch algebraische, trigonometrische oder logarithmische Funktionen von x auszudrücken. Die Integrale solcher irrationaler Differentialgleichungen, welche sich nicht auf eine rationale Gestalt zurückbringen lassen, hängen, wenn man sie unter einer endlichen Gestalt ausdrücken will, von höheren transzendenten Funktionen von x ab, für welche bis jetzt im Durchschnitt noch keine Tafeln berechnet worden sind, ähnlich denjenigen, welche wir für die trigonometrischen und logarithmischen Funktionen besitzen. In der Folge werden wir jedoch sehen, auf welche Weise wir immer Integrale dieser Art durch unendliche Reihen auszudrücken im Stande sind.

Die vorhergehenden irrationalen Differentialgleichungen sind die einzigen etwas allgemeinen, deren Integral sich unter einer bekannten endlichen Gestalt darstellen läßt. Indessen gibt es noch viele andere irrationale Differentialgleichungen, bei welchen man durch eine schickliche Substitution statt x denselben Zweck erreicht; da jedoch Fälle dieser Art immer speziell sind, so lassen sich darüber keine allgemeinen Regeln geben; es bleibt daher der Übung und der Geschicklichkeit des Rechners überlassen, aufzufinden, welche Sub-

stitution oder Transformation in einem vorliegenden Falle zum Ziele führen kann.

So sey, z. B., $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

Wenn wir hier vermittelst einer Substitution statt x, $\sqrt{x^2+1}$ unter eine rationale Gestalt brächten, so würde dabei der Ausdruck von $\sqrt{x^2-1}$ immer noch irrational bleiben; und eben so würde $\sqrt{x^2+1}$ irrational bleiben, wenn wir $\sqrt{x^2-1}$ rational machten. Indem wir jedoch den Zähler und den Nenner in dem zweiten Gliede der Gleichung durch $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$ multipliziren, und bemerken, daß $(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})\,(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = 2$, so verwandelt sich die vorige Differentialgleichung in

$$dy = \frac{1}{2}\,dx\,\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\,dx\,\sqrt{x^2-1};$$ es ist also

$$y = \frac{1}{2}\int dx\,\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int dx\,\sqrt{x^2-1} + \text{const.}$$

Es ist nach dem vorhergehenden §.

$$\int dx\,\sqrt{x^2+1} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\log.\,(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\int dx\,\sqrt{x^2-1} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\log.\,(x + \sqrt{x^2-1});$$

substituiren wir diese Werthe, so ist

$$y = \frac{x\,(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{4} + \frac{1}{4}\log.\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

$+$ const.

§. 125.

Betrachten wir nun $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx$, und suchen wir dieses Integral abhängig zu machen von andern Integralen, welche den Umständen nach einfacher sind.

Wir können immer annehmen, daß a durch keine Potenz der veränderlichen Größe multiplizirt ist; denn wenn, z. B., $x^{m-1}(ax^q + bx^n)^p\,dx$ vorkömmt, so bemerken wir, daß $ax^q + bx^n = x^q(a + bx^{n-q})$, also $(ax^q + bx^n)^p = x^{pq}(a + bx^{n-q})^p$, daher $x^{m-1}(ax^q + bx^n)^p\,dx = x^{m+pq-1}(a + bx^{n-q})^p\,dx$.

Wir können ferner immer annehmen, daß die Exponenten $m - 1$ und n ganze Zahlen sind; denn wenn im allgemeinen $dy = z^{\frac{r}{s}}\left(a + bz^{\frac{t}{u}}\right)^p dz$, so setzen wir $z = x^{su}$, woraus $z^{\frac{r}{s}} = x^{ur}$, $z^{\frac{t}{u}} = x^{ts}$, und $dz = su\,x^{su-1}\,du$ folgt; substituiren wir diese Werthe, so verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$dy = su\,x^{ru+su-1}(a + bx^{ts})^p\,dx,$$

in welcher Gleichung jetzt die Exponenten $ru + su - 1$, und ts ganze Zahlen sind. Dagegen der Exponent p kann eine ganze oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl seyn, je nachdem diese Differentialgleichung mit einer verschiedenen gegebenen in Übereinstimmung gebracht werden soll.

§. 126.

Die Differentialgleichung $dy = x^{m-1}(a + bx^n)^p\,dx$ kann in drei Fällen vermittelst einer schicklichen Substitution direkt integrirt werden, unter welchen drei Fällen der erste jedoch nur ein spezieller Fall des zweiten ist.

1) Wenn $m = n$, so setzen wir $a + bx^n = z$; hieraus folgt $bn\,x^{n-1}\,dx = dz$, $x^{n-1}\,dx = \frac{dz}{bn}$, daher

$$dy = x^{n-1}(a + bx^n)^p\,dx = \frac{z^p\,dz}{bn}, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{1}{bn}\int z^p\,dz = \frac{z^{p+1}}{bn(p+1)} + \text{const.} = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{bn\,(p+1)} + \text{const.}$$

Es sey, z. B., $dy = \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{\alpha^3+x^3}} = x^2(\alpha^3+x^3)^{-\frac{2}{3}}dx$,

so ist $m-1=2$, $m=3=n$, $a=\alpha^3$, $b=1$, $p=-\frac{2}{3}$,

daher $y = \frac{(\alpha^3+x^3)^{\frac{1}{3}}}{3\,.\,\frac{1}{3}} + \text{const.} = \sqrt[3]{\alpha^3+x^3}$.

2) Wenn m, durch n dividirt, einen ganzen positiven Quotienten, welcher $= r$ sey, gibt, so, daß $m = nr$, so setzen wir wieder $a + bx^n = z$, woraus

$x^n = \frac{z-a}{b}$, $x^{rn} = \frac{(z-a)^r}{b^r}$, daher $x^{rn-1}\,dx = \frac{(z-a)^{r-1}dz}{nb^r}$ folgt; es ist also $dy = x^{rn-1}(a+bx^n)^p\,dx =$

$$\frac{z^p\,(z-a)^{r-1}\,dz}{nb^r} = \frac{1}{nb^r}\left[z^{p+r-1}\,dz + (r-1)\,az^{p+r-2}\,dz + \frac{(r-1)(r-2)^2}{1\,.\,2}\,az^{p+r-3}\,dz + \ldots\right]$$

folglich

$$y = \frac{1}{nb^r}\left[\frac{z^{p+r}}{p+r} + \frac{(r-1)\,a}{p+r-1}\,z^{p+r-1} + \frac{(r-1)\,(r-2)a^2}{2\,(p+r-2)}\,z^{p+r-2} + \ldots\right] + \text{const.};$$

da nach Annahme r eine ganze positive Zahl ist, so sind in dieser Reihe alle Theilsätze von demjenigen an, in welchem zuerst $r-r$ als Faktor vorkömmt, $= 0$.

Wenn in dem Ausdrucke von dy ein Exponent von $z = -1$, so ist in dem Integral $\int\frac{dz}{z} = \log. z$ zu setzen.

Es sey, z. B., $dy = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = x^3(\alpha^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$,

so ist $m-1=3$, $m=4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=\alpha^2$, $b=1$; es ist also gegenwärtig $\frac{m}{n} = r = 2$, folglich

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\, z^{\frac{3}{2}} + 2\alpha^2\, z^{\frac{1}{2}}\right] + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\alpha^2+x^2)^3} + \alpha^2\sqrt{\alpha^2+x^2} + \text{const.}$$

3) Es ist $a + bx^n = x^n\left(\frac{a}{x^n} + b\right) = x^n(ax^{-n} + b)$, daher $(a + bx^n)^p = x^{np}(ax^{-n} + b)^p$, folglich $dy = x^{m-1}(a+bx^n)^p\, dx = x^{m+np-1}(ax^{-n} + b)^p\, dx$; wenn also $m + np$ durch $-n$ dividirt, d. h., wenn $-\frac{m}{n} - p$ eine ganze positive Zahl ist, so können wir die Integration nach 2 vornehmen.

Es sey, z. B.,

$$dy = \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{\alpha^3+x^3}} = x^{-6}(\alpha^3 + x^3)^{-\frac{1}{3}}\, dx;$$

es ist hier $m - 1 = -3$, daher $m = -2$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$, daher $-\frac{m}{n} - p = +\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, also eine ganze und positive Zahl; substituiren wir nun statt m, n und p ihre Werthe in den transformirten Ausdruck, so ist $dy = x^{-4}(\alpha^3\, x^{-3} + 1)^{-\frac{1}{3}}\, dx$; da nun $m - 1 = -4$, also $m = -3 = n$, so erhalten wir nach (1), indem wir $p = -\frac{1}{3}$, $a = 1$, $b = \alpha^3$ setzen,

$$y = \frac{(\alpha^3\, x^{-3} + 1)^{\frac{2}{3}}}{2\alpha^3} + \text{const.}$$

§. 127.

Als Grundlage aller folgenden Transformationen nehmen wir die durch Differentiation entstehende Gleichung an: $d[x^m(a + bx^n)^p] = mx^{m-1}(a + bx^n)^p\, dx + bnpx^{m+n-1}(a + bx^n)^{p-1}\, dx$; es ist also

$$x^{m-1}(a + bx^n)^p\, dx = \frac{d[x^m(a + bx^n)^p]}{m}$$

$$-\frac{bnp}{m}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1}, \text{ folglich } \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^p}{m}-\frac{bnp}{m}\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1} \ldots\ldots \text{I},$$

wo, wie überall in der Folge, die willkürliche Constante zuzufügen ist.

Diese Formel kann nur dann mit Vortheil angewandt werden, wenn m negativ, n und p positiv sind, und wenn das ursprüngliche Integral von einem andern abhängig gemacht werden soll, bei welchem der Exponent von x außerhalb der Parentheſe und der Exponent der Parentheſe dem absoluten Werthe nach kleiner sind.

Da die Formel I. wahr ist, welches auch die Werthe von m und p sind, so bleibt sie wahr, wenn wir zugleich $m-n$ statt m, und $p+1$ statt p setzen; dadurch verwandelt sie sich in

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{m-n}$$

$$-\frac{bn(p+1)}{m-n}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p; \text{ es ist also}$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)}$$

$$-\frac{m-n}{bn(p+1)}\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1} \ldots\ldots \text{II.}$$

Bemerken wir, daß

$x^{m-1}(a+bx^n)^p = x^{m-1}(a+bx^n)(a+bx^n)^{p-1}$
$= ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} + bx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}$,
und substituiren wir dieses in die ursprüngliche Gleichung, so ist $d[x^m(a+bx^n)^p] = amx^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$
$+b(m+np)x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$, setzen wir $p+1$ statt p, so ist $d[x^m(a+bx^n)^{p+1}] = amx^{m-1}(a+bx^n)^p dx$
$+b(m+np+n)x^{m+n-1}(a+bx^n)^p dx$; es ist also

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{am}$$

$$-\frac{b(m+np+n)}{am}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p dx \ldots\ldots \text{III.}$$

Setzen wir in diese Gleichung $m - n$ statt m, und nehmen wir sodann den Werth von $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$

$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np)} - \frac{a(m-n)}{b(m+np)} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p \ldots \text{IV.}$$

Es ist

$bx^{m+n-1} = x^{m-1} \cdot bx^n = x^{m-1}(a + bx^n) - ax^{m-1}$;

substituiren wir diesen Werth in die ursprüngliche Gleichung, so ist $d[x^m (a + bx^n)^p] = (m + np) x^{m-1} dx (a + bx^n)^p - anp\, x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1}$; es ist also $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$

$$= \frac{x^m (a+bx^n)^p}{m+np} + \frac{anp}{m+np} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{p-1} \ldots\ldots \text{V.}$$

Setzen wir in diese Gleichung $p + 1$ statt p, und nehmen wir sodann den Werth von

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = -\frac{x^m (a + bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}$$

$$+ \frac{m + np + n}{an(p+1)} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{p+1} \ldots\ldots\ldots \text{VI.}$$

Wir haben also jetzt die sechs verschiedenen Formeln:

$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$

I.

$$= \frac{x^m (a + bx^n)^p}{m} - \frac{bnp}{m} \int x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^{p-1};$$

II.

$$= \frac{x^{m-n} (a + bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{m-n}{bn(p+1)} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^{p+1};$$

III.

$$= \frac{x^m (a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b(m+np+n)}{am} \int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^p;$$

IV.

$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np)} - \frac{a(m-n)}{b(m+np)} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p;$$

V.

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np} + \frac{anp}{m+np} \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx)^{p-1};$$

VI.

$$= -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+np+n}{an(p+1)} \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p+1}.$$

Denjenigen Theil des zweiten Gliedes dieser Gleichungen, welcher das noch zu entwickelnde Integral enthält, nennt man den summatorischen Theil des vollständigen Integrals. Es versteht sich von selbst, daß überall noch die willkürliche Constante zuzufügen ist.

§. 128.

Wenden wir die Formeln des vorigen §. zuerst auf zwei Fälle an, für welche der Exponent der Parenthese eine ganze und negative Zahl ist.

Es sey $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^p} = \int x^{m-1}(x^n \pm 1)^{-p}\,dx$ zu bestimmen. Setzen wir also in die Formel VI. des vorigen §. $b = 1$, $a = \pm 1$, und $-p$ statt $+p$, so ist $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^p}$

$$= \pm \frac{x^m}{n(p-1)(x^n \pm 1)^{p-1}} \mp \frac{m-np+n}{n(p-1)} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^{p-1}}.$$

Setzen wir in diese Gleichung $p-1$ statt p, so erhalten wir den summatorischen Theil des vorigen Integrals

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^{p-1}} = \pm \frac{x^m}{n(p-2)(x^n \pm 1)^{p-2}} \mp \frac{m-np+2n}{n(p-2)} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^{p-2}}.$$

Da nun p nach Annahme eine ganze Zahl ist, so kommen wir endlich auf ein Integral, dessen summatorischer Theil $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^2}$ enthält, setzen wir also $p = 2$ in die obige Gleichung, so ist

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x^n \pm 1)^2} = \pm \frac{x^m}{n(x^n \pm 1)} \mp \frac{m-n}{n} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n \pm 1}.$$

Weiter können wir die Reduktion nicht fortsetzen; denn wenn wir in die obige Gleichung $p = 1$ setzen, so wird ihr zweites Glied unendlich groß.

Wir bestimmen also nach §. 116. das Integral $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n \pm 1}$ des letzten summatorischen Theils direkt.

Es sey $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^p}$ zu bestimmen.

Setzen wir also in die Formel VI. des vorigen §. $m - 1 = o$, d. i., $m = 1$, $n = 2$, $-p$ statt p, $b = 1$, $a = \beta^2$, so erhalten wir

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^p} = \frac{z}{2(p-1)(z^2+\beta^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{p-1}};$$

setzen wir jetzt $p - 1$ statt p, so erhalten wir den summatorischen Theil dieses Integrals

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{p-1}} = \frac{z}{2(p-2)(z^2+\beta^2)^{p-2}} + \frac{2p-5}{2(p-2)} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{p-2}};$$

und so gelangen wir endlich zu

$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^2} = \frac{z}{2(z^2+\beta^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$; diesen letztern summatorischen Theil können wir nicht mehr vermittelst der obigen Formel bestimmen, weil für $p = 1$ deren zweites Glied unendlich groß wird; nach §. 113. finden wir aber direkt $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}$ arc. tg. $\frac{z}{\beta}$ + const.

Wenn in dem ersten der so eben bemerkten Fälle $m > n$, und wenn in dem zweiten Falle dz noch durch eine Potenz von z multiplizirt ist, so kann man sich vorerst der Formel II. mit Vortheil bedienen, um den Exponenten außerhalb der Parentheſe gleichfalls zu erniedrigen.

Es sey, z. B., $dy = \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)^3}$, so setzen wir in die Formel II. $m - 1 = 4$, also $m = 5$, $n = 2$, $p = -2$, $a = 1$, $b = o$, und erhalten $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$

$= -\frac{x^3}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$; setzen wir jetzt $m-1=2$, also $m=3$, $n=2$, $p=-2$, $a=1$, $b=1$, so erhalten wir eben so $\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$; es ist aber

$\int\frac{dx}{1+x^2} =$ arc. tg. x; substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir das gesuchte Integral

$y = -\frac{x^3}{4(1+x^2)^2} - \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}$ arc.tg.x+const.

§. 129.

Es sey $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu bestimmen. Setzen wir in die Formel IV. $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$, so erhalten wir

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

setzen wir nun m nach und nach gleich den geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 ..., so erhalten wir

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{const.};$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4\sqrt{1-x^2}}{5} + \frac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^6\sqrt{1-x^2}}{7} + \frac{6}{7}\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Substituiren wir von dem ersten Integrale an in einem jeden folgenden Integrale statt des summatorischen Theiles seinen entwickelten Werth, welcher durch das vorhergehende Integral ausgedrückt ist, so erhalten wir

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{2.4}{3.5}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{5.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

Das Gesetz, nach welchem die endliche Reihe, durch welche $\sqrt{1-x^2}$ multiplizirt ist, fortgeht, ist augenscheinlich.

Wenn wir $m = 1$ setzen, so wird das zweite Glied der Gleichung unendlich groß; wir können also $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nicht auf diese Weise ausdrücken, wir wissen aber schon aus §. 26., daß $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x$; setzen wir nun nach und nach m gleich den ungeraden Zahlen 3, 5, 7..., so erhalten wir

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^5\sqrt{1-x^2}}{6} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

es ist also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{arc. sin. } x + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\text{arc. sin. } x + \text{const.};$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{arc. sin. } x + \text{const.}$$

§. 130.

Setzen wir in die erste Gleichung des vorigen §. $m+2$ statt m, so verwandelt sich dieselbe in

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

es ist also $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m+1}{m}\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Setzen wir $-m$ statt $+m$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{mx^m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}.$$

Geben wir in dieser Gleichung m nach und nach die ungeraden Werthe 1, 3, 5, 7 ..., so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{7x^7} + \frac{6}{7}\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}};$$

es ist also

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3x}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5x^5} + \frac{4}{3.5x^3} + \frac{2.4}{3.5x}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7x^7} + \frac{6}{5.7x^5} + \frac{4.6}{3.5.7x^3} + \frac{2.4.6}{3.5.7x}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

Wenn wir $m = o$ setzen, so wird das zweite Glied der Gleichung unendlich groß, wir können also nicht auf diese Weise $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ausdrücken; setzen wir aber in die entsprechende Formel von §. 122. $\alpha = -1$, $\beta = o$, $\gamma = 1$, so erhalten wir, indem wir — log. 2 der Constante zufügen, $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log. \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + \text{const.}$

Geben wir nun nach und nach m die geraden Werthe 2, 4, 6 ..., so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}};$$

es ist also

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log. \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\log. \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4x^2} + \frac{3}{2.4x^2}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\log. \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6x^6} + \frac{5}{4.6x^4} + \frac{3.5}{2.4.6x^2}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\log. \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \text{const.}$$

Aus der Formel V folgt

$$\int x^{m-1}dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

statt des summatorischen Theils dieses Integrals können wir nun aus dem vorhergehenden seinen Werth substituiren.

§. 131.

Wenn die Integration einer algebraischen Differentialgleichung weder durch Substitution noch durch Transforma-

tion unter einer bekannten endlichen Gestalt bewerkstelligt werden kann, so bleibt uns nichts anders übrig, als dieses Integral durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Es sey im allgemeinen $dy = X\,dx$, und X eine algebraische Funktion von X. Setzen wir die Faktoren des Nenners, welche x enthalten, in den Zähler, indem wir das Zeichen ihres Exponenten verändern; entwickeln wir sodann vermittelst des binomischen und polynomischen Lehrsatzes die angedeuteten Erhebungen zu ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten, und vollziehen wir die angedeuteten Multiplikationen, so werden wir für X eine Entwickelung von der Gestalt erhalten

$$X = Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + Dx^{n+3} + \ldots;$$

es ist also

$$dy = (Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + Dx^{n+3} + \ldots)\,dx,$$

folglich

$$y = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + \frac{Bx^{n+2}}{n+2} + \frac{Cx^{n+3}}{n+3} + \frac{Dx^{n+4}}{n+4} + \ldots + \text{const.}$$

§. 132.

Das Verfahren des vorigen §. dient auch, transzendente Funktionen in vielen Fällen mit Leichtigkeit in unendlichen Reihen zu entwickeln.

Es sey, z. B., $dy = \frac{dx}{1+x}$; es ist

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots,$$

es ist also $dy = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots)\,dx,$

daher $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\ldots;$

es ist aber auch $y = \int \frac{dx}{1+x} = \log.\,(1+x) + \text{const.},$

folglich

$$\log.\,(1+x) + \text{const.} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Diese Gleichung muß wahr seyn, welches auch der Werth von x ist, sie bleibt also auch wahr, wenn wir $x = o$ setzen; es wird aber dann $\log. 1 + \text{const.} = o$, es ist also $\text{const.} = o$, folglich

$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, wie wir schon §. 33. auf eine andere Weise gefunden haben.

Es sey $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; es ist

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^4 + \frac{1.3}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 x^6 + \frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 x^8 + \ldots\ldots;$$

es ist also $dy = \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^4\right.$

$$\left. + \frac{1.3}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 x^6 + \frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 x^8 + \ldots.\right] dx, \text{ folglich}$$

$$y = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{x^5}{5}$$

$$+ \frac{1.3}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{x^9}{9} + \ldots\ldots; \text{ es ist aber}$$

auch $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x + \text{const.}$, folglich

$$\text{arc. sin. } x + \text{const.} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^5}{5}$$

$$+ \frac{1.3}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Setzen wir $x = o$, so wird diese Reihe arc. sin. o + const. $= o$, es ist also $\text{const.} = o$, folglich arc. sin. x

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Das Gesetz des Fortganges dieser Reihe ist augenscheinlich.

§. 133.

Es sey nun $dy = x^m\,dx\,(x^n + a^n)^p$.

$$\text{Es ist } (x^n + a^n)^p = x^{np}\left(1 + \frac{a^n}{x^n}\right)^p$$

$$= x^{np}\left[1 + p\,\frac{a^n}{x^n} + \frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{a^{2n}}{x^{2n}} + \ldots\right];$$

$$\text{es ist also } dy = \left[x^{m+np} + pa^n\,x^{m+np-n}\right.$$

$$\left. + \frac{p(p-1)}{1.2}\,a^{2n}\,x^{m+np-2n} + \ldots\right]dx,$$

$$y = \text{const.} + \frac{x^{m+np+1}}{m+np+1} + \frac{pa^n\,x^{m+np-n+1}}{m+np-n+1}$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}\,a^{2n}\,\frac{x^{m+np-2n+1}}{m+np-2n+1} + \ldots$$

$$= \text{const.} + x^{m+np+1}\left[\frac{1}{m+np+1} + \frac{p}{m+np-n+1}\,\frac{a^n}{x^n}\right.$$

$$\left. + \frac{p\,(p-1)}{2\,(m+np-2n+1)}\,\frac{a^{2n}}{x^{2n}} + \ldots\right].$$

Wenn in dem entwickelten Differentiale ein Theilsatz $\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}\,a^{ni}\,x^{m+np-ni}$ vorkömmt, in welchem der Exponent von x, $m + np - ni = -1$, so ist das Integral dieses Theilsatzes

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}\,\log.\,x.$$

In dieser Entwickelung nehmen von einem Theilsatze zu seinem folgenden die Exponenten von x in einer arithmetischen Progression ab, deren Differenz $= n$ ist, sie werden also am Ende negativ; wenn also a merklich kleiner als x ist, so wird diese Reihe stark konvergiren; wenn aber x kleiner als a ist, so ist die Reihe divergent. Wir können jedoch für diesen Fall das Integral auf eine andere Weise durch eine Reihe entwickeln; es ist nämlich $(x^n + a^n)^p =$

$$a^{np}\left(1+\frac{x^n}{a^n}\right)^p = a^{np}\left[1+p\,\frac{x^n}{a^n}+\frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{x^{2n}}{a^{2n}}+\ldots\right],$$

folglich

$$dy = a^{np}\left[x^m+p\,\frac{x^{n+m}}{a^n}+\frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{x^{2n+m}}{a^{2n}}+\ldots\right]dx,$$

alſo

$$y = \text{const.} + a^{np}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{p}{m+n+1}\,\frac{x^{m+n+1}}{a^n}+\ldots\right]$$

$$= \text{const.} + a^{np}\,x^{m+1}\left[\frac{1}{m+1}+\frac{px^n}{(m+n+1)\,a^n}\right.$$

$$\left.+\frac{p(p-1)\,x^{2n}}{2(m+2n+1)\,a^{2n}}+\ldots\right].$$

Es ſey, z. B., $dy = \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{a^4+x^4}}$, ſo iſt $m=2$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$; wir erhalten alſo vermittelſt der erſten Entwickelung $y = \text{const.} + x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\,\frac{a^4}{x^4}+\frac{5}{96}\,\frac{a^8}{x^8}\ldots\right)$, welche Reihe ſtark konvergirt, wenn $x > a$. Nach der zweiten Entwickelung erhalten wir

$$y = \text{const.} + \frac{x^3}{a}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{28}\,\frac{x^4}{a^4}+\frac{5}{352}\,\frac{x^8}{a^8}+\ldots\right),$$ welche Reihe ſtark konvergiren wird, wenn $x < a$.

§. 134.

Wenn wir das Integral von $dy = X\,dx$ nach einer Reihe entwickeln wollen, ſo iſt es nicht immer nöthig, den Differentialquotienten X nach einer Reihe von Einſätzen in Bezug auf x zu entwickeln, ſondern in vielen Fällen iſt es vortheilhaft, X nach einer Reihe zu entwickeln, von welcher die einzelnen Theile zuſammengeſetzte Funktionen von x ſind; nur muß dann ein jeder derſelben, durch dx multiplizirt, unter einer endlichen und bekannten Geſtalt integrirbar ſeyn.

Es sey, z. B., $dy = dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$, und e ein nicht großer Bruch der Einheit.

Es ist $\sqrt{1-e^2x^2} = (1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{8}e^4x^4 - \frac{1}{16}e^6x^6 - \ldots\ldots$,

folglich $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^2}{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$- \frac{e^4}{8}\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^6}{16}\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots$; stellen wir nun, um abzukürzen, arc. sin. x durch A vor, so ist nach §. 129.

$y = \int dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = A + \frac{1}{4}e^2(x\sqrt{1-x^2} - A)$

$+ \frac{1}{32}e^4\left[\left(x^3 + \frac{3}{2}x\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2}A\right]$

$+ \frac{1}{96}e^6\left[\left(x^5 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{3.5}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{3.5}{2.4}A\right] + \ldots$

$+$ const., welche Reihe stark konvergiren wird, wenn e nur ein kleiner Bruch ist.

Es ist $\sqrt{1-e^2x^2} = \sqrt{1-e^2+e^2-e^2x^2}$

$= \sqrt{1-e^2+e^2(1-x^2)} = e\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}}$,

daher $dy = e\,dx\sqrt{1+\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}}$. Es ist

$\sqrt{1+\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}} = \left[1 + \frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)} - \frac{1}{8}\frac{(1-e^2)^2}{e^4(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\frac{(1-e^2)^3}{e^6(1-x^2)^3} \ldots$,

folglich $dy = dx + \frac{1-e^2}{2e^2}\frac{dx}{1-x^2}$

$- \frac{(1-e^2)^2}{8e^4}\frac{dx}{(1-x^2)^2} - \frac{(1-e^2)^3}{16e^6}\frac{dx}{(1-x^2)^3} - \ldots$

Setzen wir in §. 113. $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, so erhalten wir $\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}$; setzen wir ferner

in die Formel VI. von §. 127. $a=1$, $b=-1$, $m-1=o$, also $m=1$, $n=2$, und nachher vorerst $p=-2$, sodann $p=-3$, sodann $p=-4$, u. s. w., so ist

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$=\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\log.\frac{1+x}{1-x}$$

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1-x^2}+\frac{3}{16}\log.\frac{1+x}{1-x}$$

.....

Substituiren wir diese Werthe, so ist

$$y=\int dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}=x+\frac{1-e^2}{4e^2}\log.\frac{1+x}{1-x}$$

$$-\frac{(1-e^2)^2}{16e^4}\left[\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$-\frac{(1-e^2)^3}{64e^6}\left[\frac{x}{(1-x^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{x}{1-x^2}+\frac{3}{4}\log.\frac{1+x}{1-x}\right]$$

+ .....

+ const.

Diese Reihe wird stark konvergiren, wenn e wenig von 1, und x merklich von 1 verschieden ist.

Von der Integration der Differentialgleichungen, in welchen der Differentialquotient durch eine logarithmische oder trigonometrische Funktion von x ausgedrückt ist.

§. 135.

Es seyen X und Y zwei beliebige Funktionen von x, so ist $d(XY)=XdY+YdX$, daher $XdY=d(XY)-YdX$, folglich $\int XdY=XY-\int YdX$.

Wenn wir also $\int Y\,dX$ unter einer bekannten endlichen Gestalt zu entwickeln im Stande sind, so können wir vermittelst dieser Gleichung auch $\int X\,dY$ unter einer endlichen Gestalt ausdrücken. Diese Formel ist eine der hauptsächlichsten Grundlagen der Integrationen, mit welchen wir uns sogleich beschäftigen werden.

Es ist $d\frac{X}{Y} = \frac{dX}{Y} - \frac{X\,dY}{Y^2}$, daher $\int \frac{dX}{Y} = \frac{X}{Y} + \int \frac{X\,dY}{Y^2}$,

und $\int \frac{X\,dY}{Y^2} = -\frac{X}{Y} + \int \frac{dX}{Y}$; wenn wir also $\int \frac{dX}{Y}$ oder $\int \frac{X\,dY}{Y^2}$ unter einer bekannten endlichen Gestalt ausdrücken können, so können wir auch vermittelst der vorhergehenden Gleichungen das andere Integral unter einer endlichen Gestalt ausdrücken.

§. 136.

Es sey $\int P\,(\log. x)^n\,dx$ zu bestimmen; P sey eine gegebene Funktion von x. Angenommen, daß $\int P\,dx = Y$; setzen wir ferner $\log. x^n = X$, folglich $dX = n\,(\log. x)^{n-1}\frac{dx}{x}$, so ist nach dem vorigen §.

$$\int P\,(\log. x)^n\,dx = Y\,(\log. x)^n - n\int Y\,(\log. x)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

Es sey nun $\int \frac{Y\,dx}{x} = Y'$, so erhalten wir auf dieselbe Weise

$$\int Y(\log. x)^{n-1}\frac{dx}{x} = Y'(\log. x)^{n-1} - (n-1)\int Y'(\log. x)^{n-2}\frac{dx}{x}.$$

Setzen wir nun nach und nach $\int \frac{Y'\,dx}{x} = Y''$,

$\int \frac{Y''\,dx}{x} = Y'''$, u. s. w., so erhalten wir auf dieselbe Weise

$$\int Y'(\log. x)^{n-2}\frac{dx}{x} = Y''(\log. x)^{n-2} - (n-2)\int Y''(\log. x)^{n-3}\frac{dx}{x},$$

$\int Y''(\log.x)^{n-3}\frac{dx}{x} = Y'''(\log.x)^{n-3} - (n-3)\int Y'''(\log.x)^{n-4}\frac{dx}{x}$,

u. s. w.; substituiren wir nach und nach diese Werthe, so erhalten wir $\int P\,(\log.x)^n\,dx = \text{const.} + Y\,(\log.x)^n - n\,Y'\,(\log.x)^{n-1} + n\,(n-1)\,Y''\log.x^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,Y'''\,(\log.x)^{n-3} + \ldots$; diese Reihe ist also von einer endlichen Anzahl von Theilsätzen, wenn Y, Y', Y'', u. s. w., unter einer bekannten endlichen Gestalt darstellbar sind, und wenn außerdem n eine ganze und positive Zahl ist.

Es sey $P = x^m$, so ist $Y = \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $Y' = \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}\,dx}{x} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, und eben so finden wir $Y'' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, $Y''' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$, u. s. w.; substituiren wir diese Werthe, so ist

$$\int x^m \log.x^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(\log.x)^n - \frac{n}{m+1}(\log.x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(\log.x)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}(\log.x)^{n-3} + \ldots\right] + \text{const.}$$

Es sey, z. B., $n = 3$, so ist

$$\int x^m (\log.x)^3\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(\log.x)^3 - \frac{3}{m+1}(\log.x)^2 + \frac{6}{(m+1)^2}\log.x - \frac{6}{(m+1)^3}\right] + \text{const.}$$

Wenn $m = -1$, so werden die Theilsätze in dem zweiten Gliede der Gleichung unendlich groß, wir können also in diesem Falle das Integral nicht auf die angegebene Weise ausdrücken. Es ist aber dann $\frac{dx}{x} = d\log.x$, folglich

$$\int(\log.x)^n\,.\,\frac{dx}{x} = \int(\log.x)^n\,d\log.x = \frac{(\log.x)^{n+1}}{n+1} + \text{const.}$$

Es sey $\int\frac{\log.x\,dx}{(1-x)^2}$ zu bestimmen.

Es ist hier $n = 2$, $Y = \int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$; da nun $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, so ist $Y' = \int \frac{dx}{x(1-x)}$

$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \log.x - \log.(1-x) = \log. \frac{x}{1-x}$; es ist also $\int \frac{\log. x \,.\, dx}{(1-x)^2} = \frac{\log. x}{1-x} - \log. \frac{x}{1-x} + \text{const.}$

§. 137.

Wenn n negativ ist, so werden die Exponenten von log. x in der Reihe des vorigen §. immer größer; in diesem Falle müssen wir das ursprüngliche Integral von einem andern abhängig machen, in welchem der Exponent von log. x dem absoluten Werthe nach größer ist.

Es ist

$$\int (\log.x)^{-n} . \frac{dx}{x} = \int (\log.x)^{-n} \, d \log. x = \frac{-1}{(n-1)(\log.x)^{n-1}};$$

da nun $\int P \, dx \, (\log.x)^{-n} = \int Px \, (\log.x)^{-n} . \frac{dx}{x}$, so erhalten wir, indem wir in §. 135. $Y = Px$, $(\log.x)^{-n} \frac{dx}{x} = dX$, also $X = -\frac{1}{(n-1)(\log.x)^{n-1}}$ setzen, $\int P \, dx \, (\log.x)^{-n}$

$$= -\frac{Px}{(n-1)(\log.x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int (\log.x)^{n-1} \, d \, (Px);$$ angenommen nun, daß $d(Px) = Q dx$, $d(Qx) = R dx$, u. s. w., so erhalten wir eben so

$\int Q \, dx \, (\log.x)^{-n+1}$

$$= -\frac{Qx}{(n-2)(\log.x)^{n-2}} + \frac{1}{n-2} \int (\log.x)^{-n+2} \, d \, (Qx),$$

$\int R \, dx \, (\log.x)^{-n+2}$

$$= -\frac{Rx}{(n-3)(\log.x)^{n-3}} + \frac{1}{n-3} \int (\log.x)^{-n+3} \, d \, (Rx),$$

. . . . . .

Wenn n eine ganze Zahl ist, so werden wir endlich zu einem Integrale gelangen, in dessen summatorischem Theile der Exponent von log. $x = -n + (n-1) = -1$, und welches also von der Gestalt ist

$$\int U\,dx\,(\log. x)^{-2} = -\frac{Vx}{\log.x} + \frac{1}{1}\int \log. x^{-1}\,d\,(Vx);$$

weiter können wir die Reduktion nicht fortsetzen, denn die Entwickelung von $\int \log. x^{-1}\,dVx$ würde $\frac{1}{n-n} = \frac{1}{0}$ als Faktor enthalten. Substituiren wir nun nach und nach, so erhalten wir

$$\int P\,dx \log.x^{-n} = -\frac{Px}{(n-1)(\log.x)^{n-1}} - \frac{Qx}{(n-2)(\log.x)^{n-2}} \cdots$$

$$-\frac{Vx}{(n-1)(n-2)\ldots.1.\log.x} + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots.1}\int (\log.x)^{-1} dVx.$$

Es sey $\int x^m\,dx\,(\log. x)^{-n}$ zu bestimmen.

Es ist hier $P = x^m$, $Q = (m+1)x^m$,

$R = (m+1)^2\,x^m$, ... $V = (m+1)^{n-2}\,x^m$,

daher $\int x^m\,dx\,(\log. x)^{-n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\,(\log. x)^{n-1}}$

$$-\frac{(m+1)\,x^{m+1}}{(n-1)\,(n-2)\,\log.\,x^{n-2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{(m+1)^{n-2}\,x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1\log.x} + \frac{(m+1)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{x^m dx}{\log. x}.$$

Wir könnten also $\int x^m\,dx\,(\log. x)^{-n}$ unter einer bekannten endlichen Gestalt darstellen, wenn wir $\int \frac{x^m\,dx}{\log. x}$ unter einer bekannten endlichen Gestalt darzustellen im Stande wären. Dieses Letztere ist aber bis jetzt nicht gelungen; wir werden jedoch in der Folge sehen, auf welche Weise wir dieses Integral durch eine Reihe ausdrücken.

§. 138.

Wir haben §. 22. gesehen, daß $da^x = \log. a\,.\,a^x\,dx$; es ist also $a^x\,dx = \frac{1}{\log.a}\,da^x$, folglich $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log.a}\,a^x + \text{const.}$

Aus der obigen Differentialgleichung folgt

$dx = \frac{da^x}{\log. a \,.\, a^x}$; wenn also in dem Differentialquotienten keine anderen Funktionen von x, als a^x und seine Potenzen enthalten sind, so verwandelt sich die Differentialgleichung, indem wir $a^x = u$, folglich $dx = \frac{du}{u \log. a}$ setzen, in eine andere, in welcher der Differentialquotient in Bezug auf u unter einer algebraischen Gestalt erscheint.

Es sey, z. B., $dy = \frac{a^x dx}{1 - a^{2x}}$; setzen wir $a^x = u$, folglich $a^x dx = \frac{du}{\log. a}$, so ist $dy = \frac{1}{\log. a} \frac{du}{1 - u^2}$, folglich

$$y = \frac{1}{2 \log. a} \log. \frac{1 + u}{1 - u} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2 \log. a} \log. \frac{1 + a^x}{1 - a^x} + \text{const.}$$

§. 139.

Es sey nun $\int P a^x dx$ zu bestimmen; P sey eine gegebene Funktion von x. Setzen wir in §. 135. $a^x dx = dY$, also $Y = \frac{1}{\log. a} \,.\, a^x$, und $X = P$, so erhalten wir

$$\int P a^x dx = \frac{P \,.\, a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a} \int a^x \, dP$$

$$= \frac{P a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a} \int a^x \frac{dP}{dx} dx.$$

Setzen wir in diese Formel $\frac{dP}{dx}$ statt P, so ist

$$\int a^x \,.\, \frac{dP}{dx} dx = \frac{a^x}{\log. a} \,.\, \frac{dP}{dx} - \frac{1}{\log. a} \int a^x \,.\, \frac{d^2P}{dx}$$

$$= \frac{a^x}{\log. a} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{\log. a} \int a^x \,.\, \frac{d^2P}{dx^2} dx;$$

eben so erhalten wir

$$\int a^x \cdot \frac{d^2P}{dx^2}\,dx = \frac{a^x}{\log.a}\,\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{1}{\log.a}\int a^x\,\frac{d^3P}{dx^3}\,dx,$$

$$\int a^x \cdot \frac{d^3P}{dx^3}\,dx = \frac{a^x}{\log.a}\,\frac{d^3P}{dx^3} - \frac{1}{\log.a}\int a^x\,\frac{d^4P}{dx^4}\,dx$$

. . . . . .

Subſtituiren wir nach und nach dieſe Werthe, ſo erhalten wir

$$\int P\,a^x\,dx = \frac{a^x}{\log.a}\,P - \frac{a^x}{(\log.a)^2}\,\frac{dP}{dx} + \frac{a^x}{(\log.a)^3}\,\frac{d^2P}{dx^2}$$

$$- \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{(\log.a)^n}\int a^x\,\frac{d^nP}{dx^n}\,dx.$$

Wenn P eine ganze algebraiſche Funktion von x iſt, ſo iſt dieſe Reihe eine endliche, denn wenn r der größte Exponent iſt, welcher in P vorkömmt, ſo iſt der Differentialquotient $\frac{d^{r+1}P}{dx^{r+1}} = 0$ (§. 29.), und eben ſo ſind alle folgende Differentialquotienten $= 0$.

Es ſey $\int x^m\,a^x\,dx$ zu beſtimmen.

Es iſt hier $P = x^m$, $\frac{dP}{dx} = mx^{m-1}$,

$\frac{d^2P}{dx^2} = m\,(m-1)\,x^{m-2}$, $\frac{d^3P}{dx^3} = m\,(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3}$,

u. ſ. w., folglich

$$\int x^m a^x dx = \frac{a^x}{\log.a}\left[x^m - \frac{m}{\log.a}\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(\log.a)^2}\,x^{m-2} - \ldots\right]$$

$+$ const.

Es ſey, z. B., $m = 4$, ſo iſt

$$\int x^4\,a^x\,dx = \frac{a^x}{\log.a}\left[x^4 - \frac{4}{\log.a}\,x^3 + \frac{12}{(\log.a)^2}\,x^2\right.$$

$$\left. - \frac{24}{(\log.a)^3}\,x + \frac{24}{(\log.a)^4}\right] + \text{const.}$$

§. 140.

Wir können auch $\int P\,a^x\,dx$ noch auf eine andere Art entwickeln.

Setzen wir in §. 135. $P\,dx = dY$, also $Y = \int P\,dx$, ferner $X = a^x$, folglich $dX = a^x \log. a\,dx$, so ist $\int P a^x\,dx = a^x Y - \log. a \int Y a^x\,dx$; setzen wir ferner $\int Y\,dx = Y'$, $\int Y'\,dx = Y''$, u. s. w., so erhalten wir eben so

$$\int Y a^x\,dx = a^x Y' - \log. a \int Y' a^x\,dx,$$
$$\int Y' a^x\,dx = a^x Y'' - \log. a \int Y'' a^x\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituiren wir nach und nach diese Werthe, so ist

$$\int a^x P\,dx = a^x [Y - Y' \log. a + Y'' (\log. a)^2 - \ldots \pm Y^{(m-1)} \log. a^{m-1}] \mp (\log. a)^m \int Y^{(m-1)} a^x\,dx.$$

Es sey, z. B., $P = \frac{1}{x^n}$, so ist $Y = \int \frac{dx}{x^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}},\quad Y' = \frac{1}{(n-1)(n-2)\,x^{n-2}},$$
$$Y'' = -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-3}},\text{ u. s. w.}$$

Es ist also

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = -a^x \left[\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{\log. a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \frac{(\log. a)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} + \ldots + \frac{(\log. a)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1.x}\right] + \frac{(\log. a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{a^x\,dx}{x}.$$

Weiter können wir die Reduktion nicht fortsetzen; denn wenn wir $\int \frac{a^x\,dx}{x}$ auf diese Weise ausdrücken wollten, indem wir in der Formel

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{\log. a}{n-1} \int \frac{a^x\,dx}{x^{n-1}},\ n=1$$ setzten, so würde das zweite Glied dieser Gleichung den Faktor $\frac{1}{1-1}$ enthalten, also unendlich groß werden.

Wenn wir also $\int \frac{a^x\,dx}{x^n}$ unter einer bekannten endlichen Gestalt auszudrücken im Stande wären, so wäre da-

durch auch $\int \frac{a^x\,dx}{x^n}$, wenn nämlich n eine ganze Zahl ist, unter einer bekannten endlichen Gestalt ausgedrückt.

Bis jetzt ist es jedoch nicht gelungen, $\int \frac{a^x\,dx}{x}$ unter einer bekannten endlichen Gestalt zu bestimmen; wir wollen daher jetzt sehen, auf welche Weise wir dieses Integral vermittelst einer unendlichen Reihe ausdrücken.

§. 141.

Es ist (§. 32.)

$$a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2 (\log. a)^2}{2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{2.3} + \ldots$$

Multipliziren wir diese Gleichung durch $\frac{dx}{x}$, und integriren wir sodann, so erhalten wir

$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = \log. x + x \log. a + \frac{x^2 (\log. a)^2}{2.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{2.3.3} + \ldots\ldots\ldots + \text{const.}$$

Diese Reihe ist jedoch nur dann stark konvergent, wenn x log. a die Einheit nicht bedeutend übertrifft.

Wenn a = der Basis e des natürlichen Logarithmensystems, so ist log. a = 1, daher

$$\int \frac{e^x\,dx}{x} = \log. x + x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{2.3^2} + \ldots + \text{const.}$$

Auf dieses Integral können wir auch $\int \frac{x^m\,dx}{\log. x}$ zurückbringen; setzen wir nämlich $x = e^{\frac{y}{m+1}}$, so ist

$dx = \frac{dy}{m+1} \cdot e^{\frac{y}{m+1}}$, $x^m = e^{\frac{my}{m+1}}$, und $\log. x = \frac{y}{m+1}$; substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir $\int \frac{x^m\,dx}{\log. x} = \int \frac{e^y\,dy}{y}$; es ist aber nach dem Vorhergehenden

$\int \frac{e^y\,dy}{y} = \log. y + y + \frac{y^2}{2.2} + \frac{y^3}{2.3.3} + \ldots +$ const.; setzen wir nun statt y wieder seinen Werth $(m+1)\log. x$, und denken wir uns $\log. (m+1)$ der willkürlichen Constante zugefügt, so ist $\int \frac{x^m\,dx}{\log. x} = \log. \log. x + (m+1)\log. x + \frac{(m+1)^2\,(\log. x)^2}{2.2} + \frac{(m+1)^3\,(\log. x)^3}{2.2.3} + \ldots +$ const.

Wenn $m = -1$, so verwandelt sich dieses in $\int \frac{dx}{x \log. x} = \log. \log. x +$ const., wie auch leicht direkt gefunden werden kann.

§. 142.

Es ist im allgemeinen $d(e^x P) = e^x (P\,dx + dP)$, daher $\int e^x (P\,dx + dP) = e^x P +$ const.; wenn wir also ein Differential, welches e^x als Faktor enthält, unter diese Gestalt setzen können, so erhalten wir durch diese Gleichung sein Integral.

Es sey, z. B., $dy = \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2}$; es ist

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x+1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2} = e^x \left(\frac{dx}{1+x} - \frac{dx}{(1+x)^2}\right), \text{ setzen wir}$$

$P = \frac{1}{1+x}$, so ist $dP = -\frac{dx}{(1+x)^2}$, daher $y = \frac{e^x}{1+x}$ + const.

Die meisten Differentialen jedoch, in welchen Exponentialgrößen vorkommen, sind nur mit Hülfe unendlicher Reihen integrirbar.

Es sey, z. B., $\int x^{mx}\,dx$ zu bestimmen. Setzen wir in die letzte Gleichung von §. 32. $u = x^{mx}$, so ist $\log. u = mx \log. x$, daher

$x^{mx} = 1 + mx \log. x + \frac{m^2 x^2}{2} \log. x^2 + \ldots$; es ist also

$$\int x^{mx} dx = \int dx + m \int x \log. x \, dx + \frac{m^2}{2} \int (\log. x)^2 x^2 dx$$

$$+ \frac{m^3}{2.3} \int (\log. x)^3 x^3 dx + \ldots$$

Setzen wir also in die entsprechende Formel von §. 136. zuerst $m = 1$, $n = 1$, sodann $m = 2$, $n = 2$, sodann $m = 3$, $n = 3$, u. s. w., so erhalten wir

$$\int x^{mx} dx = x + \frac{mx^2}{2} \left(\log. x - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{m^2}{2} \frac{x^3}{3} \left[(\log. x)^2 - \frac{2}{3} \log. x + \frac{2}{9}\right]$$

$$+ \frac{m^3}{2.3} \frac{x^4}{4} \left[(\log. x)^3 - \frac{3}{4} (\log. x)^2 + \frac{6}{16} \log. x - \frac{6}{64}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{const.}$$

§. 143.

Wir gehen nun zu denjenigen Differentialgleichungen über, in welchen der Differentialquotient trigonometrische Funktionen von x enthält. Betrachten wir vorerst diejenigen dieser Gleichungen, in welchen nur Potenzen der trigonometrischen Linien und bekannte Größen vorkommen.

Es ist $d [\sin. x^m \cos. x^n]$

$= m \sin. x^{m-1} \cos. x^{n+1} dx - n \sin. x^{m+1} \cos. x^{n-1} dx$

$= m \sin. x^{m-1} \cos. x^{n-1} (1 - \sin. x^2) dx - n \sin. x^{m+1} \cos. x^{n-1} dx$

$= m \sin. x^{m-1} \cos. x^{n-1} dx - (m+n) \sin. x^{m+1} \cos. x^{n-1} dx$,

weil $\cos. x^{n+1} = \cos. x^{n-1} \cos. x^2 = \cos. x^{n-1} (1 - \sin. x^2)$; setzen wir in diese Gleichung $m - 1$ statt m, und $n + 1$ statt n, so verwandelt sie sich in $d (\sin. x^{m-1} \cos. x^{n+1}) = (m-1) \sin. x^{m-2} \cos. x^n - (m+n) \sin. x^m \cos. x^n dx$; hieraus folgt $\int \sin. x^m \cos. x^n dx = - \frac{\sin. x^{m-1} \cos. x^{n+1}}{m+n}$

$$+ \frac{m-1}{m+n} \int \sin. x^{m-2} \cos. x^n dx. \ldots\ldots\ldots (1).$$

Setzen wir in der ersten Gleichung

$\sin. x^{m+1} = \sin. x^{m-1} \sin. x^2 = \sin. x^{m-1} (1 - \cos. x^2)$,

so verwandelt sich dieselbe nach den gehörigen Reduktionen in

$d (\sin. x^m \cos. x^n) = (m + n) \sin. x^{m-1} \cos. x^{n+1} dx - n \sin. x^{m-1} \cos. x^{n-1} dx$; setzen wir jetzt $m+1$ statt m, und $n-1$ statt n, so verwandelt sich diese Gleichung in

$d (\sin. x^{m+1} \cos. x^{n-1}) = (m + n) \sin. x^m \cos. x^n dx - (n-1) \sin. x^m \cos. x^{n-2} dx$; es ist also

$$\int \sin. x^m \cos. x^n dx = \frac{\sin. x^{m+1} \cos. x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin. x^m \cos. x^{n-2} dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Setzen wir in die Gleichung 1 $n = o$, so erhalten wir

$$\int \sin. x^m dx = -\frac{\sin. x^{m-1} \cos. x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin. x^{m-2} dx \ldots (3).$$

Setzen wir in die Gleichung 2 $m = o$, so erhalten wir

$$\int \cos. x^n dx = \frac{\sin. x \cos. x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos. x^{n-2} dx \ldots (4)$$

Es sey nun $\int \sin. x^m \cos. x^n dx$ auszudrücken. Wenn n eine ungerade ganze und positive Zahl ist, so bringen wir vermittelst der Gleichung 1 dieses Integral auf ein anderes zurück, in welchem alles übrige dasselbe, nur der Exponent von sin. x, $m - 2$ ist; dieses Integral bringen wir eben so auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von sin. x, $m - 4$ ist, u. s. w.

Wir kommen also auf diese Weise endlich auf

$$\int \cos. x^n \sin. x dx = \int \cos. x^n \times -d \cos. x = -\frac{\cos. x^{n+1}}{n+1}.$$

So, z. B.,

$$\int \sin. x^5 \cos. x^4 dx = -\frac{\sin. x^4 \cos. x^5}{9} + \frac{4}{9} \int \sin. x^3 \cos. x^5 dx,$$

eben so ist

$$\int \sin. x^3 \cos. x^4 dx = -\frac{\sin. x^2 \cos. x^5}{7} + \frac{2}{7} \int \sin. x \cos. x^5 dx;$$

$\int \sin. x \cos. x^4 dx = -\frac{\cos. x^5}{5} + \text{const.}$; substituiren wir nach und nach diese Werthe, so ist

$$\int \sin. x^5 \cos. x^4\, dx = -\frac{\sin. x^4 \cos. x^5}{9} - \frac{4}{9.7} \sin. x^2 \cos. x^5$$

$$- \frac{4.2}{9.7.5} \cos. x^5 + \text{const.}$$

Wenn n eine ungerade positive Zahl ist, so bringen wir vermittelst der zweiten Reduktionsformel dieses Integral auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von cos. x, n — 2 ist; dieses Integral bringen wir auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von cos. x, n — 4 ist, u. s. w.; wir gelangen also auf diese Weise endlich zu

$$\int \sin. x^m \cos. x\, dx = \int \sin. x^m\, d \sin. x = \frac{\sin. x^{m+1}}{m+1}.$$

So ist, z. B.,

$$\int \sin. x^6 \cos. x^3\, dx = \frac{\sin. x^7 \cos. x^2}{9} + \frac{2}{9} \int \sin. x^6 \cos. x\, dx;$$

$$\int \sin. x^6 \cos. x\, dx = \frac{\sin. x^7}{7} + \text{const.}; \text{ es ist also}$$

$$\int \sin. x^6 \cos. x^3\, dx = \frac{\sin. x^7 \cos. x^2}{9} + \frac{2}{9.7} \sin. x^7 + \text{const.}$$

Wenn m und n zugleich positive gerade Zahlen sind, so bringen wir vermittelst der ersten oder zweiten Reduktionsformel das Integral auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von sin. x, m — 2 ist, wenn wir die erste, und in welchem der Exponent von cos. x, n — 2 ist, wenn wir die zweite Reduktionsformel anwenden; auf dieselbe Weise bringen wir diese Integrale auf andere zurück, in welchen für den ersten Fall der Exponent von sin. x, m — 4, und in dem zweiten Falle der Exponent von cos. x, n — 4 ist; indem wir so fortfahren, so kommen wir endlich in dem ersten Falle auf $\int \cos. x^n\, dx$, und in dem zweiten Falle auf $\int \sin. x^m\, dx$. Das erste Integral bringen wir vermittelst der vierten Reduktionsformel auf ein anderes, in welchem der Exponent von cos. x, n—2 ist; dieses wieder auf ein anderes, in welchem der Exponent von cos. x, n — 4 ist; und so gelangen wir endlich zu $\int dx = x$, weil nach Annahme n eine gerade Zahl ist.

Das zweite Integral bringen wir vermittelst der dritten Reduktionsformel auf ein anderes, in welchem der Exponent von sin. x, m — 2 ist; und indem wir so fortfahren, gelangen wir endlich wieder zu $\int dx = x$, weil m nach Annahme eine gerade Zahl ist.

So, z. B., ist vermöge der ersten Reduktionsformel

$$\int \sin.x^2 \cos.x^4 dx = -\frac{\sin. x \cos. x^5}{6} + \frac{1}{6} \int \cos. x^4 dx;$$

nach der dritten Reduktionsformel ist

$$\int \cos. x^4 dx = \frac{\sin. x \cos. x^3}{4} + \frac{3}{4} \int \cos. x^2 dx;$$

$$\int \cos. x^2 dx = \frac{\sin. x \cos. x}{2} + \frac{1}{2} \int dx;$$

$$\int dx = x + \text{const.};$$

substituiren wir nach und nach diese Werthe, so ist

$$\int \sin. x^2 \cos. x^4 dx = -\frac{\sin. x \cos. x^5}{6} + \frac{1}{4.6} \sin. x \cos. x^3$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6} \sin. x \cos. x + \frac{1.3}{2.4.6} x + \text{const.}$$

§. 144.

Setzen wir in die erste und dritte Reduktionsformel — m + 2 statt m, so verwandeln sie sich in

$$\int \frac{\cos. x^n dx}{\sin. x^{m+2}} = -\frac{\cos. x^{n+1}}{(n - m + 2) \sin. x^{m-1}}$$

$$- \frac{m - 1}{n - m + 2} \int \frac{\cos. x^n dx}{\sin. x^m};$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^{m-2}} = + \frac{\cos. x}{(m-2) \sin. x^{m-1}} + \frac{m-1}{m-2} \int \frac{dx}{\sin. x^m};$$

hieraus folgt

$$\int \frac{\cos. x^n dx}{\sin. x^m} = -\frac{\cos. x^{n+1}}{(m - 1) \sin. x^{m-1}}$$

$$- \frac{n - m + 2}{m - 1} \int \frac{\cos. x^n dx}{\sin. x^{m-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^m} = -\frac{\cos. x}{(m-1) \sin. x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin. x^{m-2}} \quad \ldots (6).$$

Setzen wir in die zweite und vierte Reduktionsformel $-n+2$ statt n, so verwandeln sie sich in

$$\int \frac{\sin. x^m\, dx}{\cos. x^{n-2}} = \frac{\sin. x^{m+1}}{(m-n+2)\cos. x^{n-1}}$$

$$-\frac{n-1}{m-n+2}\int \frac{\sin. x^m\, dx}{\cos. x^n},$$

$$\int \frac{dx}{\cos. x^{n-2}} = -\frac{\sin. x}{(n-2)\cos.^{n-2}} + \frac{n-1}{n-2}\int \frac{dx}{\cos. x^n}.$$

Hieraus folgt $\int \frac{\sin. x^m\, dx}{\cos. x^n} = \frac{\sin. x^{m+1}}{(n-1)\cos. x^{n-1}}$

$$-\frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin. x^m\, dx}{\cos. x^{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\int \frac{dx}{\cos. x^n} = \frac{\sin. x}{(n-1)\cos. x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos. x^{n-2}} \ldots (8).$$

Setzen wir in der fünften Reduktionsformel $-n$ statt n, und in der siebenten $-m$ statt m, so verwandeln sie sich in

$$\int \frac{dx}{\sin. x^m \cos. x^n} = -\frac{1}{(m-1)\sin. x^{m-1}\cos. x^{n-1}}$$

$$+\frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\cos. x^n \sin. x^{m-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (9);$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^m \cos. x^n} = \frac{1}{(n-1)\sin. x^{m-1}\cos. x^{n-1}}$$

$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin. x^m \cos. x^{n-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Es sey nun $\int \frac{\cos. x^n\, dx}{\sin. x^m}$ zu bestimmen. Wenn n eine positive ungerade Zahl ist, so bestimmen wir nach dem vorigen §. dieses Integral direkt; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so bringen wir vermittelst der zweiten Reduktionsformel dieses Integral auf $\int \frac{dx}{\sin. x^m}$ zurück. Wenn m eine gerade Zahl ist, so bringen wir dieses Integral nach und nach vermittelst der sechsten Reduktionsformel auf andere, und kommen so endlich zu $\int \frac{dx}{\sin. x^2} = -\frac{\cos. x}{\sin. x} + \text{const.}$ $= -\cot. x + \text{const.}$; wenn aber m eine ungerade Zahl

ist, so gelangen wir vermittelst derselben Reduktionsformel endlich auf $\int \frac{dx}{\sin. x}$, welches wir auf diese Weise nicht ausdrücken können, weil für $m = 1$ das zweite Glied dieser Gleichung unendlich groß wird.

Es sey nun $\int \frac{dx \sin. x^m}{\cos. x^n}$ zu bestimmen. Wenn m eine ungerade Zahl ist, so bestimmen wir dieses Integral nach dem vorigen §. direkt; wenn aber m eine gerade Zahl ist, so bringen wir vermittelst der ersten Reduktionsformel dieses Integral endlich auf $\int \frac{dx}{\cos. x^n}$; wenn nun n gerade, so kommen wir vermittelst der achten Reduktionsformel endlich auf $\int \frac{dx}{\cos. x^2} = \frac{\sin. x}{\cos. x} + \text{const.} = \text{tg. } x + \text{const.}$; wenn aber n ungerade ist, so gelangen wir zu $\int \frac{dx}{\cos. x}$, welches wir in dem nächsten §. bestimmen werden.

Es sey nun $\int \frac{dx}{\sin. x^m \cos. x^n}$ zu bestimmen. Wenn der eine der beiden Exponenten, z. B. n, eine gerade Zahl ist, so kommen wir vermittelst der zehnten Reduktionsformel endlich auf $\int \frac{dx}{\sin. x^m}$, und sodann vermittelst der sechsten Reduktionsformel, wenn m gerade ist, auf $\int \frac{dx}{\sin. x^2} = -\cot. x + \text{const.}$; dagegen wenn m ungerade ist, so gelangen wir zu $\int \frac{dx}{\sin. x}$.

Wenn m und n ungerade sind, so gelangen wir vermittelst der neunten Reduktionsform auf $\int \frac{dx}{\cos. x^n \sin. x}$, und von da vermittelst der siebenten Reduktionsformel auf $\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x}$.

So ist, z. B., $\int \frac{dx}{\sin. x^4 \cos. x^2}$ nach der zehnten Reduktionsformel $= \frac{1}{\sin. x^3 \cos. x} + 4 \int \frac{dx}{\sin. x^4}$; es ist sodann nach der sechsten Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{\sin. x^4} = -\frac{\cos. x}{3 \sin. x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sin. x^2};$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^2} = -\cot. x + \text{const.}; \text{ es ist also}$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^4 \cos. x^2} = \frac{1}{\sin. x^3 \cos. x} - \frac{4}{3} \frac{\cos. x}{\sin. x^3} - \frac{4.2}{3} \cot. x + \text{const.}$$

So ist nach der neunten Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{\sin. x^3 \cos. x^5} = -\frac{1}{2 \sin. x^2 \cos. x^4} + 4 \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x^4};$$

und nach der zehnten Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x^5} = \frac{1}{4 \cos. x^4} + \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x^3};$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x^3} = \frac{1}{2 \cos. x^2} + \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x}; \text{ es ist also}$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^3 \cos. x^5} = -\frac{1}{2 \sin. x^2 \cos. x^4} + \frac{1}{\cos. x^4} + \frac{2}{\cos. x^2} + 4 \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x}$$

§. 145.

Bestimmen wir nun $\int \frac{dx}{\sin. x}$. Es ist

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \int \frac{\sin. x \, dx}{\sin. x^2} = -\int \frac{d \cos. x}{1 - \cos. x^2} = -\int \frac{du}{1 - u^2},$$ indem wir $\cos. x = u$ setzen. Es ist aber nach §. 113.

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \log. \frac{1+u}{1-u} + \text{const.} = \log. \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} + \text{const.};$$

substituiren wir wieder die entsprechenden Werthe, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = -\log. \sqrt{\frac{1+\cos.x}{1-\cos.x}} + \text{const.} = \log. \sqrt{\frac{1-\cos.x}{1+\cos.x}}$$

+ const., indem es gleichgültig ist, ob wir + const. oder — const. setzen. Es ist

$$\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1-\cos. x}{2}}, \quad \cos. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1+\cos. x}{2}};$$

dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir $\text{tg}. \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{1-\cos. x}}{\sqrt{1+\cos. x}}$; es ist also

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \log. \text{tg}. \frac{1}{2} x + \text{const.}$$

Setzen wir in diese Gleichung $90° - x$ statt x, so verwandelt sich dx in $d(90° - x) = -dx$, sin. x in cos. x, $\text{tg}. \frac{1}{2} x$ in $\text{tg}. \left(45° - \frac{1}{2} x\right)$

$$= \cot. \left(45° + \frac{1}{2} x\right) = \frac{1}{\text{tg}. (45° + \frac{1}{2} x)}, \text{ es ist also}$$

$$-\int \frac{dx}{\cos.x} = \log. \text{tg}. \left(45° - \frac{1}{2} x\right) + \text{const.}; \text{ daher}$$

$$\int \frac{dx}{\cos.x} = \log. \text{tg}. \left(45° + \frac{1}{2} x\right) + \text{const.}, \text{ indem wir,}$$

wie vorhin, — const. statt + const. hinschreiben.

Setzen wir in die vorhergehende Gleichung 2 x statt x, so verwandelt sie sich in $\int \frac{2\,dx}{\sin. 2x} = \log. \text{tg}. x + \text{const.}$; es ist aber sin. 2 x = 2 sin. x cos. x, folglich $\frac{2}{\sin. 2x}$

$$= \frac{1}{\sin. x \cos. x}, \text{ daher } \int \frac{2\,dx}{\sin. 2x} = \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x}$$

$$= \log. \text{tg}. x + \text{const.}$$

Es ist $\int \frac{\cos. x\, dx}{\sin. x} = \int \frac{d \sin. x}{\sin. x} = \log. \sin x + \text{const.}$

$$= -\log. \text{cosec}. x + \text{const.}$$

Es ist $\int \frac{\sin. x\, dx}{\cos. x} = -\int \frac{d \cos. x}{\cos. x} = -\log. \cos. x + \text{const.} = \log. \sec. x + \text{const.}$

Wenn in dem Differentialquotienten Potenzen von andern trigonometrischen Linien als Faktoren enthalten sind, so bestimmen wir das Integral dieser Gleichung durch dieselben Reduktionsformeln, indem wir $\text{tg. } x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$, $\cot. x = \frac{\cos. x}{\sin. x}$, $\sec. x = \frac{1}{\cos. x}$, $\text{cosec. } x = \frac{1}{\sin. x}$ setzen.

§. 146.

Es ist $d \sin. px = p \cos. px\, dx$, und $d \cos. px = -p \sin. px\, dx$, daher $\cos. px\, dx = \frac{1}{p} d \sin. px$, $\sin. px\, dx = -\frac{1}{p} d \cos. px$, also

$$\int \cos. px\, dx = \frac{1}{p} \sin. px + \text{const.},$$

$$\int \sin. px\, dx = -\frac{1}{p} \cos. px + \text{const.}$$

Setzen wir in den bekannten trigonometrischen Formeln

$\sin. (a + b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b,$
$\sin. (a - b) = \sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b,$
$\cos. (a + b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b,$
$\cos. (a - b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b,$

$a = px$, $b = qx$, so verwandeln sie sich in

$\sin. (p+q)\, x = \sin. px \cos. qx + \cos. px \sin. qx,$
$\sin. (p-q)\, x = \sin. px \cos. qx - \cos. px \sin. qx,$
$\cos. (p+q)\, x = \cos. px \cos. qx - \sin. px \sin. qx,$
$\cos. (p-q)\, x = \cos. px \cos. qx + \sin. px \sin. qx.$

Addiren wir die erste dieser Gleichungen zu der zweiten; addiren wir die dritte Gleichung zu der vierten, und subtrahiren wir sodann die dritte Gleichung von der vierten, so ist

$$\sin.px\cos.qx = \frac{1}{2}\sin.(p+q)x + \frac{1}{2}\sin.(p-q)x,$$

$$\cos.px\cos.qx = \frac{1}{2}\cos.(p-q)x + \frac{1}{2}\cos.(p+q)x,$$

$$\sin.px\sin.qx = \frac{1}{2}\cos.(p-q)x - \frac{1}{2}\cos.(p+q)x.$$

Es ist also

$$\int\sin.px\sin.qx\,dx = \frac{1}{2}\int\cos.(p-q)x\,dx - \frac{1}{2}\int\cos.(p+q)x\,dx$$

$$= +\frac{1}{2(p-q)}\sin.(p-q)x - \frac{1}{2(p+q)}\sin.(p+q)x + \text{const.},$$

$$\int\sin.px\cos.qx\,dx = \frac{1}{2}\int\sin.(p+q)x\,dx + \frac{1}{2}\int\sin.(p-q)x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2(p+q)}\cos.(p+q)x - \frac{1}{2(p-q)}\cos.(p-q)x + \text{const.},$$

$$\int\cos.px\cos.qx\,dx = \frac{1}{2}\int\cos.(p-q)x\,dx + \frac{1}{2}\int\cos.(p+q)x\,dx$$

$$= \frac{1}{2(p-q)}\sin.(p-q)x + \frac{1}{2(p+q)}\sin.(p+q)x + \text{const.}$$

So ist, z. B.,

$$\int\sin.4x\sin.3x\,dx = \frac{1}{2}\sin.x - \frac{1}{14}\sin.7x + \text{const.},$$

$$\int\sin.5x\cos.4x\,dx = -\frac{1}{18}\cos.9x - \frac{1}{2}\cos.x + \text{const.},$$

$$\int\cos.3x\cos.2x\,dx = \frac{1}{2}\sin.x + \frac{1}{10}\sin.5x + \text{const.}$$

§. 147.

In der Anwendung der Integralrechnung auf die Astronomie werden in der Regel die Integralen von Differentialen, in welchen Potenzen des Sinus und des Cosinus enthalten sind, durch die Sinus und die Cosinus der vielfachen Bögen ausgedrückt; wir wollen daher jetzt sehen, auf welche Weise dieses bewerkstelliget werden kann.

Es ist

$\cos. x^n = A \cos. nx + B \cos. (n-2)x + C \cos. (n-4)x + \ldots,$

und, wenn n gerade ist,

$\sin. x^n = A \cos. nx - B \cos. (n-2)x + C \cos. (n-4)x - \ldots,$

dagegen, wenn n ungerade ist,

$\sin. x^n = A \sin. nx - B \sin. (n-2)x + C \sin. (n-4)x - \ldots,$

in welche Gleichungen wir aus §. 104. statt A, B, C, u. s. w., ihre Werthe zu substituiren haben. Indem wir also in $\int \cos. x^n \, dx$, $\int \sin. x^m \, dx$, $\int \sin. x^m \cos. x^n \, dx$ statt $\sin. x^m$ und $\cos. x^n$ ihre Werthe substituiren, und sodann unterhalb des letzteren Integrals die angedeuteten Multiplikationen vollziehen, so gelangen wir dadurch zu einer Summe von einzelnen Integralen, welche wir nach dem vorigen §. bestimmen.

So ist, z. B.,

$$\sin. x^4 = \frac{1}{8} (\cos. 4x - 4 \cos. 2x + 3), \text{ also}$$

$$\int \sin. x^4 \, dx = \frac{1}{8} \int \cos. 4x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos. 2x \, dx + \frac{3}{8} \int dx$$

$$= \frac{1}{32} \sin. 4x - \frac{1}{4} \sin. 2x + \frac{3}{8} x + \text{const.}$$

Es ist $\cos. x^4 = \frac{1}{8} (\cos. 4x + 4 \cos. 2x + 3)$, und

$$\sin. x^3 = -\frac{1}{4} (\sin. 3x - 3 \sin. x); \text{ es ist also}$$

$$\sin. x^3 \cos. x^4 = -\frac{1}{32} (\cos. 4x + 4 \cos. 2x + 3)(\sin. 3x - 3 \sin. x)$$

$$= -\frac{1}{32} (\cos. 4x \sin. 3x + 4 \cos. 2x \sin. 3x + 3 \sin. 3x$$

$$- 3 \sin. x \cos. 4x - 12 \sin. x \cos. 2x - 9 \sin. x);$$

es ist also $\int \sin. x^3 \cos. x^4 \, dx$

$$= -\frac{1}{32} \int \cos. 4x \sin. 3x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos. 2x \sin. 3x \, dx$$

$$- \frac{3}{32} \int \sin. 3x \, dx + \frac{3}{32} \int \sin. x \cos. 4x \, dx$$

$$+ \frac{3}{8} \int \sin. x \cos. 2x \, dx + \frac{9}{32} \int \sin. x \, dx;$$

wir erhalten also, indem wir in dem vorigen §. statt p und q nach und nach ihre entsprechenden Werthe substituiren

$$\int \sin. x^3 \cos. x^4 \, dx =$$

$$+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{14}\cos. 7x - \frac{1}{2}\cos. x\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\cos. 5x + \frac{1}{2}\cos. x\right)$$

$$+\frac{1}{32}\cos. 3x - \frac{3}{32}\left(\frac{1}{10}\cos. 5x - \frac{1}{6}\cos. 3x\right)$$

$$-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\cos. 3x - \frac{1}{2}\cos. x\right) - \frac{9}{32}\cos. x + \text{const.}$$

§. 148.

Wenn in dem Differentialquotienten die trigonometrischen Linien noch auf andere Weisen mit einander verbunden sind, so müssen wir uns bestreben, vermittelst einer schicklichen Substitution dieses Differential in ein anderes umzuwandeln, in welchem der Differentialquotient in Bezug auf die substituirte veränderliche Größe unter einer algebraischen Gestalt erscheint.

In vielen Fällen ist zu diesem Zwecke die Substitution $\text{tg}. \frac{1}{2} x = u$ geeignet; hieraus folgt nämlich

$$1 + \text{tg}. \frac{1}{2} x^2 = \sec. \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{\cos. \frac{1}{2} x^2} = 1 + u^2,$$

daher $\cos. \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{1+u^2}$, folglich

$$2 \cos. \frac{1}{2} x^2 = 1 + \cos. x = \frac{2}{1+u^2}, \text{ mithin}$$

$$\cos. x = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}; \text{ es ist also}$$

$$1 - \cos. x^2 = \sin. x^2 = 1 - \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2$$

$$= \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}, \text{ daher } \sin. x = \frac{2u}{1+u^2}, \text{ daher}$$

$\text{tg. } x = \frac{2u}{1-u^2}$; differentiiren wir den Ausdruck des Sinus, so ist

$$\cos. x\, dx = \frac{2du(1+u^2)-4u^2du}{(1+u^2)^2} = \frac{2du(1-u^2)}{(1+u^2)^2};$$

es ist also

$$dx = \frac{2du(1-u^2)}{(1+u^2)^2} : \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Vermittelst der Substitution $\text{tg. } \frac{1}{2} x = u$ drücken wir also sowohl die trigonometrischen Linien von x als auch dx auf eine rationale Weise in Bezug auf u aus.

Es sey, z. B., $\int \frac{dx}{a+b\cos. x+c\sin. x}$ zu bestimmen.

Substituiren wir $\text{tg. } \frac{1}{2} x = u$, so erhalten wir nach den gehörigen Reduktionen

$$\int \frac{dx}{a+b\cos. x+c\sin. x} = \int \frac{2du}{(a-b)u^2+2cu+a+b}$$

(indem wir in der entsprechenden Formel von §. 113. u statt x, a—b statt α, c statt β, und a + b statt γ setzen) =

$$\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \log. \frac{(a-b)u+c-\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{(a-b)u+c+\sqrt{c^2-a^2+b^2}} + \text{const.},$$

wenn nämlich $c^2 > a^2 - b^2$; wenn aber $c^2 < a^2 - b^2$, so ist nach demselben §. dieses Integral

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \text{arc. tg. } \frac{(a-b)u+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} + \text{const.}; \text{ es ist}$$

also in dem ersten Falle $\int \frac{dx}{a+b\cos. x+c\sin. x} =$

$$\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}} \log. \frac{(a-b)\text{tg. }\frac{1}{2}x+c-\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{(a-b)\text{tg. }\frac{1}{2}x+c+\sqrt{c^2-a^2+b^2}} + \text{const.},$$

und in dem zweiten Falle

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-c^2-b^2}} \text{arc. tg. } \frac{(a-b)\text{ tg. }\frac{1}{2}x+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} + \text{const.}$$

Wenn $c = o$, so erhalten wir $\int \frac{dx}{a + b\cos. x}$ für $a < b$,

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log. \frac{-(b-a)\,tg.\frac{1}{2}x - \sqrt{b^2-a^2}}{-(b-a)\,tg.\frac{1}{2}x + \sqrt{b^2-a^2}} + const.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log. \frac{\sqrt{b-a}\,tg.\frac{1}{2}x + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,tg.\frac{1}{2}x - \sqrt{b+a}} + const.,$$

und für $a > b$,

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} arc.\ tg. \frac{(a-b)\,tg.\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2}} + const.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} arc.\ tg. \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, tg.\, \frac{1}{2}x + const.$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen werden unendlich groß, wenn $a = b$; es ist aber dann

$$\int \frac{dx}{1+\cos. x} = \int du = u + const. = tg.\, \frac{1}{2}x + const.$$

Es sey $\int \frac{dx}{(a + b\cos. x)^n}$ zu bestimmen. Setzen wir $a + b\cos. x = v$, so folgt daraus durch Differentiation $-b \sin. x\, dx = dv$, daher $dx = -\frac{dv}{b \sin. x}$;

es ist aber $\cos. x = \frac{v-a}{b}$, daher

$$\sin. x = \sqrt{1-\cos. x^2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2 + 2av - v^2}}{b},$$

es ist also $dx = \frac{-dv}{\sqrt{b^2 - a^2 + 2av - v^2}}$, folglich

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos. x)^n} = \int \frac{-dv}{v^n \sqrt{b^2 - a^2 + 2av - v^2}}.$$

Wenn also n eine ganze Zahl ist, so können wir nach §. 123. dieses Integral unter einer endlichen Gestalt darstellen. In astronomischen Rechnungen kömmt dieses Integral öfters vor, aber in der Regel ist dann der Exponent n ein gebrochener; man drückt dann dieses Integral durch eine Reihe von Cosinussen vielfacher Winkel aus.

Die Auseinandersetzung, wie dieses geschieht, würde uns hier zu weit führen; ich muß in dieser Hinsicht auf die größeren Werke über Integralrechnung von Euler und Lacroix verweisen.

§. 149.

Es sey $\int X\,dx$ arc. sin. x zu bestimmen. Angenommen, daß $\int X\,dx = V$; da nun (§. 26.) d arc. sin. $x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, so ist nach der Reduktionsformel von §. 135.

$$\int X\,dx \text{ arc. sin. } x = V \text{ arc. sin. } x - \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wenn $X = x^n$, so ist $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, daher

$$\int x^n \text{ arc. sin. } x\,dx = \frac{x^{n+1} \text{ arc. sin. } x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

den summatorischen Theil dieses Integrals bestimmen wir nach §. 129. und 130., wenn n eine ganze Zahl ist. Wenn $n = o$, so erhalten wir

$$\int \text{arc. sin. } x\,.\,dx = x \text{ arc. sin. } x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \text{ arc. sin. } x + \sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

Es stelle z einen Bogen vor, von welchem der Sinus oder irgend eine andere trigonometrische Linie x ist; es sey $dz = v\,dx$, welches v immer eine algebraische Funktion von x seyn wird (§. 26.), so ist, indem wir $\int X\,dx = V$ setzen, $\int X\,dx\,z^n = Vz^n - n\int V v\,dx\,.\,z^{n-1}$; es sey nun $\int V v\,dx = V'$, so ist eben so $\int V v\,dx\,.\,z^{n-1} = V' z^{n-1} - (n-1)\int V' v\,dx\,z^{n-2}$; wenn wir also alle diese Integrale V, V', V'', u. s. w., unter einer endlichen Gestalt ausdrücken können, und wenn n eine ganze positive Zahl ist, so erhalten wir, indem wir statt der summatorischen Integrale nach und nach ihre Werthe substituiren,

$$\int X\,dx\,z^n = V z^n - n V' z^{n-1} + n(n-1) V'' z^{n-2} - \ldots$$

+ const. durch eine endliche Reihe ausgedrückt.

Es sey, z. B., $X = 1$, und $z = \text{arc. sin. } x$,

so ist $\frac{dz}{dx} = v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $V = x$,

$$V' = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$V'' = -\int \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$V''' = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}, \text{ u. s. w.; es ist also}$$

$$\int z^n\,dx = x\,z^n + n\sqrt{1-x^2}\,z^{n-1}$$
$$- n(n-1)\,x\,z^{n-2} + n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}\,z^{n-3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \text{const.}$$

Es sey $z = \text{arc. tg. } x$, also $\frac{dz}{dx} = v = \frac{1}{1+x^2}$, und $X = x^2$,

so ist $V = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$, $V' = \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{3}\int x\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}\log.(1+x^2)$;

es ist also $\int x^2\,dx\,\text{arc. tg. } x = \frac{1}{3}x^3\,\text{arc. tg. } x$

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log.(1+x^2) + \text{const.}$$

§. 150.

Es ist nach der Reduktionsformel von §. 135.

$\int e^{ix}\,\text{sin. } x\,dx = -e^{ix}\,\text{cos. } x + i\int e^{ix}\,\text{cos. } x\,dx$;

$\int e^{ix}\,\text{cos. } x\,dx = e^{ix}\,\text{sin. } x - i\int e^{ix}\,\text{sin. } x\,dx$; substituiren wir vorerst statt des summatorischen Theils seinen Werth aus der zweiten Gleichung in die erste, so ist

$$\int e^{ix}\,\text{sin. } x\,dx = -\frac{e^{ix}\,\text{cos. } x + i\,e^{ix}\,\text{sin. } x}{1+i^2} + \text{const.};$$

substituiren wir statt des summatorischen Theils seinen Werth aus der ersten Gleichung in die zweite, so ist

$$\int e^{ix}\,\text{cos. } x\,dx = \frac{e^{ix}\,\text{sin. } x + i\,e^{ix}\,\text{cos. } x}{1+i^2} + \text{const.}$$

Setzen wir in diese Formeln ax statt x, und setzen wir sodann ai = m, also $i = \frac{m}{a}$, so verwandeln sie sich, nachdem wir durch a dividirt haben, in

$$\int e^{mx} \sin. ax\, dx = \frac{-ae^{mx} \cos. ax + me^{mx} \sin. ax}{a^2 + m^2} + \text{const.},$$

$$\int e^{mx} \cos. ax\, dx = \frac{ae^{mx} \sin. ax + me^{mx} \cos. ax}{a^2 + m^2} + \text{const.}$$

Es sey nun das Integral von $e^{mx} \cos. x^n\, dx$ oder $e^{mx} \sin. x^n\, dx$ zu bestimmen. Drücken wir nach §. 104. cos. x^n und sin. x^n durch eine Reihe von Cosinus oder Sinus vielfacher Bögen von x aus, so verwandeln sich diese beiden Differentialen in eine Summe von einzelnen Differentialen, welche wir nach dem Vorhergehenden bestimmen. Es sey, z. B., $\int e^x \cos. x^3\, dx$ zu bestimmen. Es ist $\cos. x^3 = \frac{1}{4} \cos. 3x + \frac{3}{4} \cos. x$, daher

$$\int e^x \cos. x^3\, dx = \frac{1}{4} \int e^x \cos. 3x dx + \frac{3}{4} \int e^x \cos. x\, dx$$

$$= \frac{3e^x \sin. 3x + e^x \cos. 3x}{40} + \frac{3e^x \cos. x + 3e^x \sin. x}{8}$$

+ const.

Es sey nun $\int e^{mx} \cos. x^n \sin. x^r\, dx$ zu bestimmen. Drücken wir nach §. 104. cos. x^n und sin. x^r durch eine Reihe von Sinus und Cosinus vielfacher Bögen von x aus, vollziehen wir die angedeutete Multiplikation der beiden Reihen, und substituiren wir nach §. 146. statt des Produktes zweier dieser trigonometrischen Linien seinen Werth, so verwandelt sich dieses Differential in die Summe einzelner Differentialen, deren Werth wir nach dem Vorhergehenden bestimmen. Es sey, z. B., $\int e^x \sin. x^2 \cos. x^3\, dx$ zu bestimmen.

Es ist $\sin. x^2 = -\frac{\cos. 2x}{2} + \frac{1}{2}$, und

$\cos. x^3 = \frac{1}{4} (\cos. 3x + 3 \cos. x)$; es ist also

$$\sin. x^2 \cos. x^3 = -\frac{1}{8}(\cos. 2x - 1)(\cos. 3x + 3\cos. x)$$

$$= -\frac{1}{8}(\cos.2x\cos.3x - \cos.3x + 3\cos. x\cos.2x - 3\cos.x)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{\cos. 5x}{2} + \frac{\cos. x}{2} - \cos. 3x + \frac{3\cos.3x}{2} + \frac{3\cos.x}{2} - 3\cos. x\right) = -\frac{1}{8}\left(\frac{\cos. 5x}{2} + \frac{\cos. 3x}{2} - \cos. x\right);$$

es ist also $\int e^x \sin. x^2 \cos. x^3 \, dx =$

$$-\frac{1}{16}\int e^x \cos. 5x \, dx - \frac{1}{16}\int e^x \cos. 3x \, dx + \frac{1}{8}\int e^x \cos. x \, dx =$$

$$-\frac{5e^x \sin. 5x + e^x \cos. 5x}{16 . 26} - \frac{3e^x \sin. 3x + e^x \cos. 3x}{16 . 10} + \frac{e^x \sin. x + e^x \cos. x}{16} + \text{const.}$$

§. 151.

Wir wollen hier noch einige Reihen betrachten, durch welche ein Integral ausgedrückt werden kann.

Es sey $y = \int X \, dx$, so ist

$\frac{dy}{dx} = X$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}$, u. s. w.; das Integral y ist also eine Funktion von x, deren sämmtliche Differentialquotienten bekannt sind, indem sie durch auf einander folgende Differentiationen aus dem ersten hergeleitet werden können. Stellen wir nun durch C den Werth vor, welchen das Integral erhalten würde, wenn wir in demselben $x = o$ setzten, welches C also eine unbestimmte beständige Größe ist; es seyen ferner durch A, A′, A″, A‴, u. s. w., die beständigen Werthe vorgestellt, in welche sich die Differentialquotienten verwandeln, indem wir in denjel-

ben $x = o$ setzen, so ist nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 35.) $y = C + Ax + A'\frac{x^2}{2} + A''\frac{x^3}{2.3} + \ldots$.

Es sey wieder $dy = X\,dx$; aus §. 135. folgt

$$y = \int X\,dx = Xx - \int x\,dX;$$

$$\int x\,dX = \int \frac{dX}{dx}\,x\,dx = \frac{dX}{dx}\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d^2X}{dx}\,x^2;$$

$$\int \frac{d^2X}{dx}\,x^2 = \int \frac{d^2X}{dx^2}\,x^2\,dx = \frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{d^3X}{dx^2}\,x^3;$$

$$\int \frac{d^3X}{dx^2}\,x^3 = \int \frac{d^3X}{dx^3}\,x^3\,dx = \frac{d^3X}{dx^3}\,\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{d^4X}{dx^3}\,x^4;$$

. . . . . ;

substituiren wir nach und nach statt der summatorischen Theile ihre Werthe, so erhalten wir

$$\int X\,dx = \text{Const.} + Xx - \frac{dX}{dx}\,\frac{x^2}{2} + \frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{x^3}{2.3} - \ldots.$$

Diese Reihe wurde zuerst von Johann Bernouilli aufgefunden, und ist daher unter dem Namen der Bernouilli'schen Reihe bekannt.

Von der Rektifikation und der Quadratur der krummen Linien, von der Quadratur der krummen Flächen, und von der Bestimmung des durch dieselben begränzten Körperinhaltes.

§. 152.

Es sey (Fig. 19.) ABCDE eine krumme Linie, welche durch ihre Gleichung zwischen y und x gegeben ist; es seyen die beiden Abszissen $OF = a$, $OI = a'$; bestimmen wir den Flächeninhalt des Segmentes BEIF, welches zwischen $FI = a' - a$, den Ordinaten BF und EI und dem Bogen BE der krummen Linie begriffen ist.

Es sey GH die verschwindend kleine Differenz zweier auf einander folgender Abszissen OH und OG, also $= dx$, HD und GC die durch H und G geführten Ordinaten, so ist $CDHG = ydx$ (§. 62.) das Differential des Segmentes BEIF, es ist daher $BEIF = \int ydx + const.$ Wir substituiren also den aus der Gleichung der krummen Linie gezogenen Werth von y, und bestimmen so $\int ydx = Y$; es ist dann das gesuchte Segment $= Y + const.$; um nun die Constante zu bestimmen, so bemerken wir, daß in dem Punkte F, für welchen $x = a$, das Segment anfängt, für $x = a$ ist also dieses Segment $= o$; angenommen nun, daß Y für $x = a$ den Werth A erhalte, so ist $o = A + const.$, daher $const. = -A$, folglich das Segment $= Y - A$; das Segment erstreckt sich ferner bis zu dem Punkte I, für welchen $x = a'$; angenommen, daß für $x = a'$, Y den Werth A' erhält, so ist das gesuchte Segment $FBEI = A' - A$.

Beispiel. Die Gleichung der Parabel ist $y^m = px^n$, woraus $y = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$ folgt; es ist also ein paraboliſches

$$\text{Segment} = \int p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} + const.$$

$$= \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m+n}{n}} + const.$$

Wenn das Segment in dem Schenkel der Parabel anfängt, für welchen $x = o$, und $y = o$, so verschwindet

dasselbe für $x = o$; es ist also $o = \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} . o + const.$,

daher $const. = o$, folglich das Segment

$$= \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} = \frac{m}{m+n} x\, p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$$

$= \frac{m}{m+n} xy =$ dem $\frac{m}{m+n}$ten Theil des auf den Coordinaten x und y ergänzten Rechteckes. Für die apollo-

nische Parabel ist $m = 2$, $n = 1$, daher ein Segment derselben $= \frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechteckes.

Es sey (Fig. 20.) der Durchmesser $AB = 2r$ die Axe der X eines Kreises, die Tangente in A die Axe Y, so ist $y = \sqrt{2rx - x^2}$, daher der Flächeninhalt eines Kreissegmentes $= \int dx \sqrt{2rx - x^2} + \text{const.}$

Es ist nach §. 122.

$$\int \sqrt{2rx - x^2} = -\frac{(r-x)\sqrt{2rx-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}},$$

und nach §. 121. $\int \frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = \frac{r^2}{2}$ arc. sin. $\frac{x-r}{r} =$

$-\frac{r^2}{2}$ arc. sin. $\frac{r-x}{r}$, daher der Flächeninhalt des Segmentes $= -\frac{r-x}{2}\sqrt{2rx-x^2} - \frac{r^2}{2}$ arc. sin. $\frac{r-x}{r} + \text{const.}$

Wenn wir annehmen, daß das Segment in A anfängt, so verschwindet das Integral für $x = o$; es ist also

$-\frac{r^2}{2}$ arc. sin. $\frac{r}{r} + \text{const.} = o$,

daher const. $= \frac{r^2}{2}$ arc. sin. $1 = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$;

da nun $\frac{\pi}{2} -$ arc. sin. $\frac{r-x}{r} =$ arc. cos. $\frac{r-x}{r}$,

so ist der Flächeninhalt des Segmentes

$= -\frac{a-x}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{r^2}{2}$ arc. cos. $\frac{r-x}{r}$.

Es sey O der Mittelpunkt des Kreises, $r - x = OC$, $y = \sqrt{2rx-x^2} = EC$, r arc. cos. $\frac{r-x}{r} = OE$ arc. cos. $\frac{OC}{EO}$ $=$ arc. AE; da nun $\frac{EC \,.\, CO}{2} =$ dem Dreiecke ECO, und $\frac{OA}{2}$. arc. $AE =$ dem Sektor EOA, so drückt der obige Werth nichts anders aus, als daß das Segment ECA gleich ist dem Sektor EOA, vermindert um das Dreieck EOC.

Es sey dieses $AB = 2r$ die große Axe einer Ellipse, deren kleine Axe $= 2b$, und deren Gleichung, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem, $y = \frac{b}{r}\sqrt{2rx - x^2}$ ist, so ist der Flächeninhalt des elliptischen Segmentes, welches wir wieder in dem Punkte A, für welchen $x = o$, wollen anfangen lassen, $= \frac{b}{r}\int\sqrt{2rx - x^2} + \text{const.}$

$$= \frac{b}{r}\left(-\frac{r-x}{2}\sqrt{2rx - x^2} + \frac{r^2}{2}\text{ arc. cos. }\frac{r-x}{r}\right);$$

wenn also das Kreissegment EAC, und das elliptische Segment ADC einer nämlichen Abszisse AC entsprechen, so ist $ADC = \frac{b}{r}$. AEC, d. i., $ADC : AEC = b : r$; da nun dasselbe Verhältniß zwischen dem Flächeninhalte des Kreises und dem Flächeninhalte der Ellipse statt findet, so ist der Flächeninhalt der Ellipse $= \frac{b}{r}.\pi r^2 = \pi br$.

Die Gleichung der apollonischen Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Axen der Coordinaten, ist $xy = a^2$; es sey α der Winkel YOX, welchen die beiden Asymptoten mit einander bilden, so ist dieses auch der Winkel, welchen die ein hyperbolisches Segment begränzenden Ordinaten mit der Axe X bilden (Fig. 21.); es ist also, weil gegenwärtig das Coordinatensystem nicht rechtwinklig angenommen wird, die von D auf OX gefällte Senkrechte $= y \sin. \alpha$, daher das Differential CDHG des Segmentes $= y \sin. \alpha\, dx = \frac{a^2 \sin. \alpha\, dx}{x}$, daher das Segment selbst

$$= a^2 \sin. \alpha \int\frac{dx}{x} = a^2 \sin. \alpha \log. x + \text{const.}$$

Wenn wir annehmen, daß das Segment mit der Ordinate BF, für welche $x = OF = a$, beginnt, so verschwindet das Segment für $x = a$; es ist also dann $a^2 \sin. \alpha \log. a + \text{const.} = o$, daher const. $= -a^2 \sin. \alpha \log. a$, folglich das Seg-

ment BFIE, welches der Abszisse x = OI entspricht, $= a^2 \sin. \alpha \log. x - a^2 \sin. \alpha \log. a = a^2 \sin. \alpha \log. \frac{x}{a}$; setzen wir a = 1, so ist BFIE = sin. α . log. x. Wenn wir also die hyperbolischen Segmente von der Ordinate an, deren Abszisse = 1, zählen, so verhalten sich diese Segmente, wie die Logarithmen der sie begränzenden andern Ordinaten, gezählt in einem Logarithmensysteme, dessen Modulus = sin. α.

Wenn sin. α = 1, also α = 90°, folglich die Hyperbel eine gleichseitige ist, so sind diese Logarithmen die natürlichen, deren Basis = e; diese Logarithmen kommen daher auch zuweilen unter der Benennung hyperbolische Logarithmen vor; wenn sin. α = 0, 43429 . . . ., so ist α = 25°, 44′, 24″; die Logarithmen sind dann die Brigg'schen, deren Basis = 10.

§. 153.

Es sey die Länge des Bogens BE (Fig. 19.) einer krummen Linie, dessen Endpunkte x = OF = a und x = OI = a′ zu Abszissen haben, zu bestimmen; die Gleichung der krummen Linie sey bezogen auf das rechtwinklige Coordinatensystem X, Y, und die Länge des Bogens sey durch s vorgestellt.

Es ist (§. 62.) das Differential CD des Bogens $= ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$; daher

$$s = \int dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} + \text{const.}$$

Wir haben hier vorerst aus der Gleichung der krummen Linie den durch eine Funktion von x und bekannten Größen ausgedrückten Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu ziehen und zu substituiren, und nach erfolgter Integration die Constante zu bestimmen, indem wir bemerken, daß für x = a das Integral verschwindet.

Beispiel. Die Gleichung der Parabeln können wir im allgemeinen durch $y = px^n$ vorstellen, in welcher Gleichung n auch einen Bruch bedeuten kann; hieraus folgt $dy = npx^{n-1}\,dx$, daher $\frac{dy^2}{dx^2} = n^2\,p^2\,x^{2n-2}$, folglich

$$= \int dx \sqrt{1 + n^2\,p^2\,x^{2n-2}} + \text{const.}$$

Es ist hier der Exponent außerhalb der Parenthese, welchen wir §. 126. durch $m - 1$ vorgestellt haben, $= o$, daher $m = 1$, der Exponent innerhalb der Parenthese $= 2n - 2$; damit also das Integral nach §. 126., 2 bestimmt werden könne, so muß $\frac{1}{2n-2} =$ einer ganzen Zahl r seyn; es muß also $2n - 2 = \frac{1}{r}$, $n = \frac{2r+1}{2r}$ seyn; setzen wir nun nach und nach 1, 2, 3, 4, ... statt r, so erhalten wir für n die Werthe $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}$.....; die Längen der Bögen der Parabeln, deren Gleichungen sind $y^2 = p^2 x^3$, $y^4 = p^4 x^5$, $y^6 = p^6 x^7$, $y^8 = p^8 x^9$ ..... können wir also darnach durch algebraische Funktionen von x ausdrücken. Es sey, z. B., $n = \frac{3}{2}$, so ist

$$s = \int dx \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}\,p^2\,x} + \text{const.}$$

$$= \frac{8}{27p^2}\left(1 + \frac{9}{4}\,p^2\,x\right)^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Wenn der Bogen an der Spitze der Parabel anfängt, so verschwindet das Integral für $x = o$, es ist also

$$\frac{8}{27p^2} + \text{const.} = o,\ \text{const.} = -\frac{8}{27p^2},\ \text{folglich}$$

$$s = \frac{8}{27p^2}\left(1 + \frac{9}{4}\,p^2\,x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27p^2}.$$

Nach §. 126., 3 können wir auch die Integration unter einer endlichen algebraischen Gestalt vornehmen, wenn

das dortige $-\frac{m}{n}-p=$ einer ganzen positiven Zahl r; es muß also gegenwärtig $-\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2}=r$,

$-\frac{1}{n-1}=2r+1$, $n-1=\frac{-1}{2r+1}$,

$n=1-\frac{1}{2r+1}=\frac{2r}{2r+1}$; dieser Werth stimmt mit dem vorhin gefundenen überein, wenn wir x mit y verwechseln.

Die Gleichung der apollonischen Parabel ist

$y=\sqrt{2px}=\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$; um so dieselbe mit der vorhin angenommenen $y=px^n$ in Übereinstimmung zu bringen, so haben wir $\sqrt{2p}$ statt p, und $\frac{1}{2}$ statt n zu setzen, es ist also $s=\int dx\sqrt{1+\frac{1}{2}px^{-1}}+$ const.; es ist aber

$\sqrt{1+\frac{1}{2}px^{-1}}=$

$\sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}p}{x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}+\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}$, daher

$s=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}+\frac{1}{2}p\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}+$ const.

Es ist nach §. 123.

$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}=\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}-\frac{1}{4}p\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}$,

und nach §. 121.

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}=\log.\left(\frac{1}{2}p+2x+2\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}\right)$;

es ist also $s=$

$\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}+\frac{1}{4}p\log.\left(\frac{1}{2}p+2x+2\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}\right)+$const.

Wenn der Bogen bei dem Scheitel der Parabel anfängt, so verschwindet das Integral für $x=0$; es ist also dann $\frac{1}{4}\log.\frac{1}{2}p+$ const. $=0$, daher const. $=-\frac{1}{4}\log.\frac{1}{2}p$, folglich $s=$

$\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}+\frac{1}{4}p\log.\frac{\frac{1}{2}p+2x+2\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}{\frac{1}{2}p}$.

Aus der Gleichung des Kreises AEB (Fig. 20.), bezogen auf dasselbe Coordinatensystem wie in dem vorigen §., folgt $y = \sqrt{2rx - x^2}$; es ist also $dy = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$,

$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2} = \frac{r^2}{2rx - x^2}$; es ist also $s = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} + \text{const.}$ Dieses Integral können wir leicht durch eine konvergirende unendliche Reihe ausdrücken, wenn wir bemerken, daß

$\frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}} = \sqrt{\frac{r}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$, und

$\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln; das Integral, unter einer endlichen Gestalt ausgedrückt, ist nach §. 121.

$s = r \text{ arc. sin.} \frac{x-r}{r} + \text{const.} = -r \text{ arc. sin.} \frac{r-x}{r} + \text{const.}$;

wenn der Bogen in A anfängt, so verschwindet das Integral für $x = o$, es ist also dann

$-r \text{ arc. sin. } 1 + \text{const.} = o$, daher $\text{const.} = r\frac{\pi}{2}$, folglich

$s = r\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc. sin.} \frac{r-x}{r}\right) = r \cdot \text{arc. cos.} \frac{r-x}{r}$, wie es sich auch schon von selbst versteht.

Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die Axen $FG = 2b$, $AB = 2a$ (Fig. 20.) als Axen der Coordinaten, ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; es ist also $dy = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, daher

$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^4 - x^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-x^2)}$;

setzen wir die Exzentrizität $\sqrt{a^2-b^2} = e$, und die halbe große Axe $a = 1$, so ist $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1-e^2x^2}{1-x^2}$; es ist also $s = \int dx \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \text{const.}$

Dieses Integral haben wir schon §. 134. auf zwei verschiedene Arten durch unendliche Reihen ausgedrückt; wenn e klein ist, so bedienen wir uns der ersten Reihe, wenn aber e wenig von der Einheit verschieden ist, so bedienen wir uns der zweiten Reihe, welche jedoch nur dann stark konvergirt, wenn die Abszisse x des Endpunktes des Bogens merklich von der Einheit verschieden ist.

§. 154.

Es drehe sich die krumme Linie AE (Fig. 19.) so um die Axe X, daß ein jeder ihrer Punkte die Peripherie eines Kreises beschreibt, dessen Mittelpunkt auf X liegt, und dessen Ebene auf X senkrecht ist, so nennt man die krumme Fläche, welche von der Peripherie der krummen Linie beschrieben wird, eine Umdrehungsfläche, deren Axe X ist.

Um nun den Flächeninhalt der von dem Bogen BE der krummen Linie, dessen Endpunkte $OE = a$ und $OI = a'$ zu Abszissen haben, beschriebenen Zone zu bestimmen, so sey $CD = ds$ das Differential des Bogens, $y = CG$ und $y + dy = DH$ die Ordinaten seiner Endpunkte. Die von dem verschwindend kleinen Bogen CD beschriebene Zone fällt zusammen mit dem von der Chorde desselben beschriebenen abgestumpften Kegel, sie ist also

$$= \frac{\text{Per.} \,.\, CG + \text{Per.} \,.\, DH}{2} \,.\, CD$$

$$= \frac{2\pi\,(y + y + dy)}{2} \,.\, ds = 2\pi\, y\, ds,$$ weil wir in der Summe $y + y + dy\, dy$ neben $y + y$ weglassen können; es ist also der Flächeninhalt der ganzen Zone

$$= 2\pi \int y\, ds + \text{const.} = 2\pi \int y\, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \text{const.}$$

Es sind hier statt y und $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der krummen Linie ihre Werthe zu substituiren, und nach erfolgter Integration ist die Constante zu bestimmen, indem wir bemerken, daß für $x = a$ das Integral verschwindet.

Beispiel. Aus der Gleichung der Parabel $y = \sqrt{2px} = x^{\frac{1}{2}} \sqrt{2p}$ folgt $dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2p}\, dx$, daher $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2} px^{-1}$; es ist also der Flächeninhalt einer parabolischen Zone

$$= 2\pi \sqrt{2p} \int x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \tfrac{1}{2} px^{-1}}\, \int x + \text{const.}$$

$$= 2\pi \sqrt{2p} \int \sqrt{x + \tfrac{1}{2} p}\, dx + \text{const.}; \text{ setzen wir}$$

$x + \frac{1}{2} p = u$, so ist $dx = du$, und

$$\int \sqrt{x + \tfrac{1}{2} p} \cdot dx = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2} p\right)^{\frac{3}{2}};$$

das Integral ist also

$$= \frac{4}{3} \pi \left(x + \frac{1}{2} p\right) \sqrt{2px + p^2} + \text{const.}$$

Wenn der Bogen in dem Scheitel der Parabel anfängt, so verschwindet das Integral für $x = o$; es ist also $\frac{2}{3} \pi p^2 + \text{const.} = o$, daher $\text{const.} = -\frac{2}{3} \pi p^2$, daher der Flächeninhalt der Zone

$$= \frac{4}{3} \pi \left(x + \frac{1}{2} p\right) \sqrt{2px + p^2} - \frac{2}{3} \pi p^2.$$

Die Gleichung des Kreises auf dasselbe Coordinatensystem wie in dem vorigen §. ist $y = \sqrt{2rx^2 - x^2}$; hieraus folgt $dy = \frac{(r - x)\, dx}{\sqrt{2rx - x^2}}$,

$$dy^2 + dx^2 = ds^2 = \frac{(r^2 - 2rx + x^2)\, dx^2}{2rx - x^2} + dx^2$$

$= \frac{r^2\, dx^2}{y^2}$; es ist also $ds = \frac{r dx}{y}$, daher $y\, ds = r\, dx$, folglich $2\pi \int y\, ds + \text{const.} = 2\pi rx + \text{const.}$

Wenn der Bogen bei einem Punkte, dessen $x = a$, anfängt, so verschwindet das Integral für $x = a$; es ist also $2\pi ra + \text{const.} = o$, daher $\text{const.} = -2\pi ra$; die Abszisse des andern Endpunktes des Bogens sey a'; es ist

dann der Flächeninhalt dieser Zone $= 2\pi ra' - 2\pi ra$ $= 2\pi r(a' - a) =$ der Höhe $a' - a$ der Zone, multiplizirt durch die Peripherie $2\pi r$ eines großen Kreises. Die Oberfläche der ganzen Kugel, als Zone betrachtet, hat zur Höhe den Durchmesser $2r$; ihr Flächeninhalt ist also $= 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 =$ dem Vierfachen des Flächeninhaltes eines großen Kreises der Kugel.

§. 155.

Bestimmen wir nun den Inhalt des Körpersegmentes, welches durch die Umdrehung des Segmentes **BEIF** (Fig. 19.) der krummen Linie **AE** um die Axe **X** beschrieben wird.

Durch die Umdrehung des auf $DH = y + dy$, $GH = dx$ ergänzten Rechteckes um die Axe **X** entsteht ein Zylinder, dessen Körperinhalt

$$= \pi (y + dy)^2 \, dx = \pi (y^2 + 2y\,dy + dy^2);$$

durch die Umdrehung des auf $CG = y$ und $GH = dx$ beschriebenen Rechteckes um die Axe **X** entsteht ein Zylinder, dessen Körperinhalt $= \pi y^2 \, dx$; die Differenz dieser beiden Zylinder ist $\pi (2y\,dy + dy^2)\,dx$, also verschwindend klein von der zweiten Ordnung. Da nun der von dem Differential **CDHG** des Segmentes beschriebene Körperinhalt zwischen diesen beiden Zylindern begriffen ist, so können wir denselben ohne Irrthum $= \pi y^2 \, dx$ setzen; es ist also der Inhalt des ganzen Körpersegmentes $= \pi \int y^2 \, dx$. Wir haben hier aus der Gleichung der krummen Linie **AE** statt y^2 vorerst seinen durch eine Funktion von x ausgedrückten Werth zu setzen, und sodann die Constante zu bestimmen, indem wir bemerken, daß für $x = a = OF$ das Integral verschwindet.

Beispiel. Aus der Gleichung der Parabeln $y^m = px^n$ folgt $y^2 = p^{\frac{2}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$; es ist also

$\pi \int y^2\,dx + \text{const.} = \pi\, p^{\frac{2}{m}} \int x^{\frac{2n}{m}}\,dx + \text{const.}$

$= \frac{m}{2n+m}\,\pi\, p^{\frac{2}{m}}\, x^{\frac{2n+m}{m}} + \text{const.} = \frac{m}{2n+m}\,\pi\, y^2\, x$

$+$ const.; die Constante ist Null, wenn wir annehmen, daß das Segment in dem Scheitel der Parabel anfängt; das beschriebene Körpersegment ist also dann

$= \frac{m}{2n+m}\,\pi\, y^2\, x =$ dem $\frac{m}{2n+m}$ten Theil des Zylinders, welcher von dem dem ebenen Segmente umschriebenen Rechtecke beschrieben wird. Für die apollonische Parabel ist $m = 2$, $n = 1$, daher $\frac{m}{2n+m} = \frac{1}{2}$.

Es sey die große Axe einer Ellipse $= 2a$, ihre kleine Axe $= 2b$, so ist ihre Gleichung, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem wie in §. 152., $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$; es ist also

$\pi \int y^2\,dx + \text{const.} = \pi \frac{b^2}{a^2} \int (2ax - x^2)\,dx + \text{const.}$

$= \pi \frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \text{const.}$ Wenn das Körpersegment (Fig. 20.) in dem Scheitel A anfängt, so verschwindet das Integral für $x = o$; es ist also dann const. $= o$, daher das Körpersegment $= \pi \frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$. Um den Körperinhalt der ganzen Umdrehungsellipsoide zu erhalten, so haben wir $x = 2a$ zu setzen; derselbe ist also

$\pi \frac{b^2}{a^2}\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\pi\, ab^2$.

Die Ellipse verwandle sich nun in einen Kreis, d. h., es werde $a = b =$ dem Halbmesser des Kreises, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden den Inhalt eines Kugelsegmentes, welches nur eine Basis, und x zur Höhe hat,

$= \pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right)$, und den Inhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3} \pi a^3$.

§. 156.

Denken wir uns durch einen Körper eine gerade Linie gezogen, und diese in eine unendliche Anzahl von unendlich kleinen Theilchen zerlegt; denken wir uns durch einen jeden Theilungspunkt eine auf die gerade Linie senkrechte Ebene geführt, so theilen diese Ebenen den Körper in eine unendliche Anzahl von unendlich dünnen Körperchen, wovon wir ein jedes als ein Prisma betrachten können, wegen der verschwindend kleinen Differenz der parallelen Basen eines jeden derselben.

Nehmen wir auf der geraden Linie einen bestimmten Punkt an; die senkrechte Entfernung einer dieser Ebenen von dem Punkte sey $= x$, und der Flächeninhalt der Figur, nach welcher diese Ebene den Körper schneidet, sey $= X$, so ist die senkrechte Entfernung der darauf folgenden Ebene von demselben Punkte $= x + dx$, und das zwischen beiden Ebenen begriffene Prisma $= X\,dx$; es ist also der ganze Körper $= \int X\,dx + \text{const.}$ Dieses X wird immer eine bestimmte Funktion von x seyn, wenn die Oberfläche des Körpers eine regelmäßige ist; die ursprünglich geführte Linie haben wir so anzunehmen, daß diese Funktion unter der einfachst möglichen Gestalt erscheint.

Nach erfolgter Integration bestimmen wir die Constante, indem wir bemerken, daß in dem einen Endpunkte des Körpers, nämlich da, wo die letzte der parallelen Ebenen die Oberfläche des Körpers berührt, für den entsprechenden bestimmten Werth von x das Integral verschwindet.

Beispiele. Es sey $DABC$ (Fig. 22.) eine Pyramide, deren Basis $ABC = a^2$, und deren Höhe $DE = h$; die Entfernung eines Punktes f der Höhe von dem Scheitel sey $= x$, und die eines darauf folgenden Punktes φ von

dem Scheitel sey $= x + dx$; angenommen, daß die durch f und φ auf die Höhe senkrecht geführten Ebenen die Pyramide nach abc und $\alpha\beta\gamma$ schneiden, so folgt aus einem bekannten Satze der Geometrie, daß

$DF^2 : Df^2 = ABC : abc$; es ist also

$abc = \frac{ABC \cdot Df^2}{DF^2} = \frac{a^2 x^2}{h^2}$, daher der Körperinhalt

$abc\,\alpha\beta\gamma = \frac{a^2}{h^2} x^2\,dx$, folglich der Körperinhalt der Pyramide $= \frac{a^2}{h^2} \int x^2\,dx + \text{const.} = \frac{a^2}{h^2} \frac{x^3}{3} + \text{const.}$

In dem Scheitel D, für welchen $x = o$, verschwindet das Integral, es ist also const. $= o$; um ferner den Körperinhalt bis zu der Basis ABC zu erhalten, so haben wir $x = h$ zu setzen; derselbe ist also $= \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{a^2 h}{3}$, wie schon aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Die Gleichung der Ellipsoide ist

$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$,

wenn 2a, 2b und 2c ihre drei Axen sind, und diese Gleichung auf die drei Axen als Coordinatenaxen bezogen ist.

Wenn wir von einem Punkte der Axe X, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte $= x$ sey, eine senkrechte Ebene auf die Axe führen, so schneidet diese die Ellipsoide nach einer Ellipse, deren Gleichung ist $c^2 y^2 + b^2 z^2 = \frac{b^2 c^2 (a^2 - x^2)}{a^2}$; setzen wir $y = o$, so erhalten wir $z = \pm \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; setzen wir $z = o$, so erhalten wir $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; die beiden Axen dieser Ellipse sind also $\frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{2c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, es ist also der Flächeninhalt derselben (§. 152.) $X = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2)$, daher der Körperinhalt eines ellipsoidischen Segmentes

$$= \pi \frac{bc}{a^2} \int (a^2 - x^2)\, dx + \text{const.} = \frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + \text{const.}$$

Um hieraus den Körperinhalt der ganzen Ellipsoide zu bestimmen, so bemerken wir, daß in dem einen Endpunkte der Axe $2a$, für welchen $x = -a$, das Integral verschwindet; es ist also $\frac{\pi bc}{a^2}\left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right) + \text{const.} = 0$, folglich const. $= \frac{2}{3}\pi abc$; die Ellipsoide erstreckt sich ferner bis zu dem andern Endpunkte der großen Axe, für welchen $x = +a$; ihr Körperinhalt ist also

$$\pi \frac{bc}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) + \frac{2}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi . abc.$$

Wenn $a = b = c$, so ist die Ellipsoide eine Kugel, deren Halbmesser $= a$; es ist also der Körperinhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\pi a^3$, wie wir schon §. 155. gefunden haben.

Von der Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung, in welchen der Differentialquotient durch eine Funktion von x und y ausgedrückt ist.

§. 157.

Wenn der Differentialquotient so unter einer Bruchgestalt ausgedrückt ist, daß der Zähler dieses Bruches eine Funktion von x allein oder y allein, und der Nenner eine Funktion von y allein oder x allein ist, so kann die Integration immer nach dem Vorhergehenden vorgenommen werden.

Denn, wenn im allgemeinen X eine Funktion von x allein, und Y eine Funktion von y allein vorstellt, und wenn $\frac{dy}{dx} = \frac{X}{Y}$, so folgt daraus $Y\,dy = X\,dx$, daher

$\int X\,dx = \int Y\,dy + \text{const.}$ Eben so, wenn $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$, so folgt daraus $\frac{dy}{Y} = \frac{dx}{X}$, es ist also $\int \frac{dy}{Y} = \int \frac{dx}{X} + \text{const.}$

§. 158.

Es stelle nun im allgemeinen $P\,dx + Q\,dy = o$ eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung vor; P und Q sind Funktionen von x und y und bekannten Größen.

Die ursprüngliche Gleichung, aus welcher die gegebene durch Differentiation entstanden ist, muß von der Gestalt seyn $f(x, y) = \text{const.}$, und es muß $\frac{df(x,y)}{dx} = P$, $\frac{df(x,y)}{dy} = Q$ seyn (§. 75.), damit $P\,dx + Q\,dy$ das vollständige Differential von $f(x, y)$ sey. Nun haben wir aber §. 77. gesehen, daß $\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx}$; es muß also seyn $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ wird also nur dann durch die unmittelbare Differentiation einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y entstanden seyn, wenn $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

§. 159.

Die Gleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ leiste der Bedingniß Genüge, welche ausdrückt, daß sie das unmittelbare Differential einer Gleichung von der Gestalt $f(x, y) = \text{const.}$ ist; bestimmen wir nun diese ursprüngliche Gleichung.

Es ist $P\,dx$ das partiale Differential von $f(x, y)$, welches, wenn $f(x, y)$ gegeben wäre, entstehen würde, indem wir $f(x, y)$ nach x allein differentiirten, und y als unveränderlich betrachteten; indem wir also integriren, und y dabei als unveränderlich betrachten, so erhalten wir

$f(x,y) = \int P\,dx + Y = V + Y$, indem wir $\int P\,dx = V$ setzen, und durch Y eine nachher zu bestimmende Funktion von y vorstellen, welche $\int P\,dx$ noch zugefügt werden mußte, weil bei der Differentiation von $f(x,y)$ nach x allein alle Theilsätze, welche nur y enthielten, verschwanden.

Differentiiren wir nun die gefundene Integralgleichung nach y allein, so erhalten wir

$\frac{df(x,y)}{dy}\,dy = \frac{dV}{dy}\,dy + dY$; es ist aber $\frac{df(x,y)}{dy} = Q$,

daher $Q\,dy = \frac{dV}{dy}\,dy + dY$, $dY = \left(Q - \frac{dV}{dy}\right)dy$, folglich

$Y = \int \left(Q - \frac{dV}{dy}\right) dy$; das vollständige Integral ist also

$f(x,y) = V + \int \left(Q - \frac{dV}{dy}\right) dy = \text{const.}$

Es sey darnach das Integral der Gleichung

$(Ax + By + C)\,dx + (Bx + Dy + E)\,dy = o$

zu bestimmen. Es ist gegenwärtig $P = Ax + By + C$, $Q = Bx + Dy + E$, daher $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = B$; die Gleichung ist also das unmittelbare Differential einer Gleichung zwischen x und y.

Es ist jetzt $V = \int P\,dx = \int (Ax + By + c)\,dx$

$= \frac{Ax^2}{2} + Bxy + Cx$, folglich $\frac{dV}{dy} = Bx$, daher

$Y = \int \left(Q - \frac{dV}{dy}\right) dy = \int (Dy + E)\,dy = \frac{Dy^2}{2} + Ey$;

das vollständige Integral ist also

$\frac{Ax^2}{2} + Bxy + \frac{Dy^2}{2} + Cx + Ey = \text{const.}$

Es sey

$x\,dx\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} + 1\right) + y\,dy\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} - 1\right) = o.$

Es ist hier

$P = x\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} + 1\right)$, $Q = y\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} - 1\right)$,

daher $\frac{dP}{dy} = -\frac{axy}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^3}} = \frac{dQ}{dx}$; die Differentialgleichung ist also das unmittelbare Differential einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y.

Es ist $V = \int P\,dx = a\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} + \int x\,dx$

$= a\sqrt{x^2+y^2-a^2} + \frac{x^2}{2}$; es ist also $\frac{dV}{dy} = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$,

folglich $Y = \int\left(Q - \frac{dV}{dy}\right) = \int -y\,dy = -\frac{y^2}{2}$; das vollständige Integral ist also

$$\frac{x^2-y^2}{2} + a\sqrt{x^2+y^2-a^2} = \text{const.}$$

Es sey das Integral von $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ zu bestimmen.

Es ist hier $P = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$, daher

$$\frac{dP}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dQ}{dx}.$$

Setzen wir $x = uy$, daher, indem wir bei dieser Integration y als unveränderlich betrachten, $dx = y\,du$, so ist

$$V = \int P\,dx = \int \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc. tg. } u$$

$= \text{arc. tg. } \frac{x}{y}$; es ist also $\frac{dV}{dy} = +\frac{x}{x^2+y^2}$, folglich

$Y = \int\left(Q - \frac{dV}{dy}\right) dy = o$; es ist also

$$\int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \text{arc. tg. } \frac{x}{y} + \text{const.}$$

§. 160.

Wenn die Gleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ so beschaffen ist, daß $\frac{dP}{dy}$ nicht $= \frac{dQ}{dx}$, so folgt daraus nicht, daß diese Differentialgleichung nicht durch die Differentiation einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y entstanden ist;

und hiervon können wir uns leicht durch die folgende Betrachtung überzeugen.

Es sey $f(x, y) = \text{const.}$ eine ursprüngliche Gleichung zwischen x und y; differentiiren wir dieselbe nach x und y, so ist $\frac{df(x,y)}{dx} dx + \frac{df(x,y)}{dy} dy = 0.$

Wenn nun $\frac{df(x,y)}{dx}$ und $\frac{df(x,y)}{dy}$ einen gemeinschaftlichen Theiler L haben, und wenn $\frac{df(x,y)}{dx} = LP$, $\frac{df(x,y)}{dy} = LQ$, so ist $LP\,dx + LQ\,dy = 0$, daher $P\,dx + Q\,dy = 0$; da nun diese letztere Differentialgleichung auf diese Weise zwar durch die Differentiation, aber nicht durch die unmittelbare Differentiation einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y entstanden ist, so ist sehr wohl möglich, daß sie auch nicht der Bedingniß der direkten Integrabilität $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ Genüge leistet.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $3y\,dx + 4x\,dy = 0$; es ist hier $P = 3y$, $Q = 4x$, daher $\frac{dP}{dy} = 3$, $\frac{dQ}{dx} = 4$; der Bedingniß der direkten Integrabilität geschieht also gegenwärtig kein Genüge. Multipliziren wir aber diese Differentialgleichung durch $y^3 x^2$, so verwandelt sie sich in $3y^4 x^2\,dx + 4y^3 x^3\,dx = 0$.

Es ist jetzt $P = 3y^4 x^2$, $Q = 4y^3 x^3$, daher $\frac{dP}{dy} = 3 \cdot 4y^3 x^2 = \frac{dQ}{dx}$; wir finden nun leicht nach dem vorigen §., daß das Integral dieser Differentialgleichung $y^4 x^3 = \text{const.}$ ist.

§. 161.

Wenn also ein allgemeines Verfahren bekannt wäre, den Faktor L zu bestimmen, durch welchen eine der Beding-

niß der direkten Integrabilität $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ nicht Genüge leistende Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ multiplizirt, in eine andere umgewandelt wird, welche dieser Bedingniß Genüge leistet, so könnten wir immer die Integration derselben nach §. 159. vornehmen. Bis jetzt ist jedoch diese Bestimmung erst in einigen besondern Fällen gelungen; einen der Hauptfälle dieser Art werden wir auf dem folgenden Wege auffinden.

Es sey also L dieser gesuchte Faktor; damit die Gleichung $LP\,dx + LQ\,dy = o$ direkt integrirbar sey, so muß $\frac{d(LP)}{dy} = \frac{d(LQ)}{dx}$, daher $L\frac{dP}{dy} + P\frac{dL}{dy} = L\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dL}{dx}$,

$Q\frac{dL}{dx} - P\frac{dL}{dy} = L\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$ seyn; aus der Gleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ folgt aber $Q = -P\frac{dx}{dy}$; es ist also

$$-P\left(\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dy} + \frac{dL}{dy}\right) = L\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy = -\frac{L}{P}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)dy$; es ist aber $\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy =$ dem vollständigen Differential von $L = dL$, daher $dL = -\frac{L}{P}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)dy$, folglich

$\frac{dL}{L} = -\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)dy = -M\,dy$, indem wir $\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = M$ setzen; wenn also M eine Funktion von y allein ist, so ist $\log. L = -\int M\,dy$; da nun im allgemeinen aus $u = \log. v$, $v = e^u$ folgt, so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit $L = e^{-\int M\,dy}$.

Wenn wir in der vorigen Gleichung $P = -Q\frac{dy}{dx}$ substituiren, so erhalten wir auf dieselbe Weise

$\frac{dL}{L} = \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) dx = N\,dx$, indem wir $\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = N$ setzen; wenn also N eine Funktion von x allein ist, so ist log. $L = N dx$, daher $L = e^{\int N\,dx}$.

§. 162.

Die allgemeinste Differentialgleichung, in welcher y nur in der ersten Potenz vorkömmt, können wir immer unter der Gestalt anschreiben: $dy + Xy\,dx = X'\,dx$; denn wenn dy noch durch eine Funktion von x multiplizirt wäre, so würde die Gleichung die bemerkte Gestalt erhalten, indem wir ihre beiden Glieder durch diese Funktion dividirten; X und X′ können eine jede gegebene Funktion von x allein vorstellen.

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $dy + (Xy - X')\,dx = 0$; es ist also hier $Q = 1$, $P = Xy - X'$, daher $N = \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = X$, welches eine Funktion von x allein ist; indem wir also diese Gleichung durch $L = e^{\int X dx}$ multipliziren, wodurch sie in $e^{\int X dx}\,dy + e^{\int X dx}(Xy - X')\,dx = 0$ umgewandelt wird, so wird sie unter dieser Gestalt nach §. 159. direkt integrirbar seyn.

Es ist gegenwärtig $Q = e^{\int X dx}$, $P = e^{\int X dx}(Xy - X')$, daher $V = \int P dx = y \int e^{\int X dx} X dx - \int e^{\int X dx} X' dx$ $= y\,e^{\int X dx} - \int e^{\int X dx} X'\,dx$, weil $\int e^{\int X dx} X dx = e^{\int X dx}$.

Es ist ferner $\frac{dV}{dy} = e^{\int X dx}$, daher $Y = \int \left(Q - \frac{dV}{dy}\right) dy = 0$;

das vollständige Integral ist also

$y\,e^{\int X dx} - \int e^{\int X dx} X'\,dx = \text{const.}$, woraus folgt

$y = e^{-\int X dx}(\text{const.} + \int e^{\int X dx} X' dx)$.

Es sey, z. B., $dy + y\frac{dx}{x} = x^n\,dx$; es ist hier $X = \frac{1}{x}$, $X' = x^n$, daher $\int X\,dx = \log. x$, $e^{\int X dx} = x$, $e^{-\int X dx} = 1 : e^{\int X dx} = \frac{1}{x}$,

$$\int e^{\int X dx} X'\,dx = \int x^{n+1}\,dx = \frac{x^{n+2}}{n+2},$$

daher $y = \frac{1}{x}\left(\text{const.} + \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$.

Es sey $dy + y\,dx = x^n\,dx$; es ist hier $X = 1$, $X' = x^n$, daher $y = e^{-x}\,(\text{const.} + \int e^x\,x^n\,dx)$; den Werth von $\int e^x\,x^n\,dx$ substituiren wir aus §. 139.

Setzen wir in die obige Differentialgleichung u statt y, welches u eine beliebige Funktion von y vorstellt, so verwandelt sie sich in $du + Xu\,dx = X'\,dx$; das Integral dieser Gleichung ist also

$u = e^{-\int X dx}\,(\text{const.} + \int e^{\int X dx} X'\,dx)$.

Es sey, z. B., $u = \frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}}$, so ist $du = -\frac{dy}{y^n}$, die Differentialgleichung wird also: $-\frac{dy}{y^n} + \frac{X\,dx}{(n-1)\,y^{n-1}} = X'\,dx$, und das Integral dieser Gleichung ist

$\frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}} = e^{-\int X dx}\,(\text{const.} + \int e^{\int X dx} X'\,dx)$, setzen wir X statt $-\frac{X}{n-1}$, also $-(n-1)\,X$ statt X, und X' statt $-X'$, so verwandelt sich die Differentialgleichung in $dy + Xy\,dx = X'\,y^n\,dx$; ihr Integral ist also

$$\frac{1}{y^{n-1}} = e^{(n-1)\int X dx}\,(\text{const.} - \int e^{-(n-1)\int X dx} X'\,dx).$$

§. 163.

Es sey $z = Ax^\alpha\,y^\beta + Bx^\gamma\,y^\delta + \ldots$ eine homogene Funktion von x und y, also $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \ldots$;

es ist $\frac{dz}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} + B\gamma x^{\gamma-1} y^{\delta} + \ldots\ldots,$

$\frac{dz}{dy} = A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1} + B\delta x^{\gamma} y^{\delta-1} + \ldots\ldots\ldots;$

addiren wir die erste Gleichung, durch x multiplizirt, zu der zweiten Gleichung, durch y multiplizirt, so ist

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dx} =$$

$$(\alpha+\beta)\,(Ax^{\alpha} y^{\beta} + Bx^{\gamma} y^{\delta} + \ldots.) = (\alpha+\beta)\,z.$$

Es sey nun $P\,dx + Q\,dy = o$, und P und Q homogene Funktionen von derselben Dimension von x und y; es sey L der integrirende Faktor dieser Differentialgleichung, so ist $LP\,dx + LQ\,dy = o$; stellen wir durch $z = f(x, y) = \text{const.}$ die ursprüngliche Gleichung vor, durch deren Differentiation diese Differentialgleichung entstanden ist, so ist $\frac{dz}{dx} = LP$, $\frac{dz}{dy} = LQ$, daher nach dem Vorhergehenden $LPx + LQy = (\alpha+\beta)\,z = (\alpha+\beta)\,\text{const.}$, indem wir durch $\alpha + \beta$ die Dimension der homogenen Funktion z vorstellen; es ist also

$$L = \frac{(\alpha+\beta)\ \text{const.}}{Px+Qy} = \frac{1}{Px+Qy};$$

denn, da const. willkürlich ist, so können wir, größerer Einfachheit wegen, $(\alpha+\beta)\ \text{const.} = 1$ setzen.

Wenn also P und Q homogene Funktionen von derselben Dimension von x und y sind, so ist $\frac{1}{Px+Qy}$ der integrirende Faktor der Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = o$.

Es sey, z. B., $(y^2 - xy)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = o$, beide Differentialquotienten also homogene Funktionen von der zweiten Dimension. Es ist gegenwärtig

$$\frac{1}{Px+Qy} = \frac{1}{x(y^2-xy)+y(x^2+y^2)} = \frac{1}{y^2\,(x+y)};$$

multipliziren wir jetzt die Differentialgleichung durch diesen Faktor, so ist $\frac{y^2-xy}{y^2\,(x+y)}\,dx + \frac{x^2+y^2}{y^2\,(x+y)}\,dy = o.$

Es ist (§. 159.) $V = \int P\,dx = \int \frac{y^2 - xy}{y^2(x+y)}\,dx$

$= -\frac{1}{y}\int dx + 2\int \frac{dx}{x+y} = -\frac{x}{y} + 2\log.(x+y)$,

daher $\frac{dV}{dy} = \frac{x}{y^2} + \frac{2}{x+y} = \frac{x^2 + xy + 2y^2}{y^2(x+y)}$, folglich

$Q - \frac{dV}{dy} = -\frac{xy + y^2}{y^2(x+y)} = -\frac{1}{y}$, also $Y = -\int\frac{dy}{y}$

$= -\log. y$; das gesuchte Integral ist also

$-\frac{x}{y} + 2\log.(x+y) - \log. y = \text{const.}$

§. 164.

Ein anderes Verfahren, eine Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, welche der Bedingniß der direkten Integrabilität nicht Genüge leistet, zu integriren, besteht darin, diese Differentialgleichung vermittelst einer schicklichen Substitution statt der veränderlichen Größen in eine andere aus zwei Theilen zusammengesetzte umzuwandeln, wovon der eine Theil das Differential der einen veränderlichen Größe, und Funktionen derselben, der andere das Differential der andern veränderlichen Größe, und Funktionen derselben, enthält; diese letztere Differentialgleichung integriren wir sodann nach §. 157.

Dieses Verfahren ist mit Erfolg auf den Fall anwendbar, wenn P und Q homogene Funktionen von derselben Dimension von x und y sind. Die Dimension dieser Funktionen sey $= n$; substituiren wir nun $y = ux$, also $dy = u\,dx + x\,du$, so wird sowohl P als auch Q aus einer Summe von Theilsätzen zusammengesetzt erscheinen, in welchen x^u gemeinschaftlicher Faktor ist; es ist also $P = Ux^u$, $Q = Vx^u$, welches U und V Funktionen von u allein sind; die Differentialgleichung verwandelt sich also dadurch in $x^u\,U\,dx + x^u\,V\,(u\,dx + x\,du) = 0$,

$dx\,(U+uV) = -\,x\,V\,du$, $\frac{dx}{x} = -\frac{V\,du}{U+uV}$; es ist also $\log. x + \text{const.} = -\int \frac{V\,du}{U+uV}$.

Nach erfolgter Integration des zweiten Gliedes dieser Gleichung substituiren wir wieder $u = \frac{y}{x}$.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$(\alpha x+\beta y)\,dx + (\gamma x+\delta y)\,dy = o$.

Durch die Substitution $y = ux$ wird $P = \alpha x+\beta y = x\,(\alpha+\beta u)$, und $Q = \gamma x+\delta y = x\,(\gamma+\delta u)$; es ist also $U = \alpha+\beta u$, $V = \gamma+\delta u$, folglich

$$\log. x + \text{const.} = -\int \frac{(\gamma+\delta u)\,du}{\delta u^2+(\gamma+\beta)u+\alpha}.$$

Das Integral des zweiten Gliedes dieser Gleichung bestimmen wir nach §. 114., und setzen dann wieder $u = \frac{y}{x}$.

Es sey die Differentialgleichung

$x\,dy - y\,dx - dx\,\sqrt{x^2+y^2} = o$ zu integriren. Setzen wir wieder $y = ux$, so wird $P = -(y+\sqrt{x^2+y^2}) = -x\,(u+\sqrt{1+u^2})$, $Q = x$, es ist also gegenwärtig $U = -u-\sqrt{1+u^2}$, $V = 1$, daher $\log. x + \text{const.} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \log.(u+\sqrt{1+u^2})$, indem wir in §. 121. die entsprechenden Werthe substituiren, und log. 2 in die Constante einrechnen.

Setzen wir log. c statt const., welches uns verstattet ist, indem log. c einen jeden möglichen Werth vorstellen kann, so ist $\log. x + \log. c = \log. cx = \log.(u+\sqrt{1+u^2})$, daher $cx = u\sqrt{1+u^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$; es ist also

$$cx^2 = y + \sqrt{y^2+x^2}.$$

§. 165.

Wenn die Differentialgleichung nicht in Bezug auf die in ihr vorkommenden veränderlichen Größen homogen ist,

so findet es doch öfters statt, daß sie mit Hülfe einer schicklichen Substitution in eine andere verwandelt werden kann, welche in Bezug auf die in ihr vorkommenden veränderlichen Größen homogen ist, also nach dem vorigen §. integrirt werden kann.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$$(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0.$$

Setzen wir

$$ax + by + c = s;\ \alpha x + \beta y + \gamma = t,$$

so folgt daraus durch Differentiation

$$\alpha dx + \beta dy = dt,\ a dx + b dy = ds,$$

und aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination

$$dx = \frac{b\,dt - \beta\,ds}{\alpha b - \beta a};\ dy = \frac{\alpha\,ds - a\,dt}{\alpha b - \beta a};$$

substituiren wir diese Werthe, so verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$s\,(b\,dt - \beta\,ds) + t\,(\alpha\,ds - a\,dt) = 0,$$

$$dt\,(bs - at) + ds\,(\alpha t - \beta s) = 0,$$

welche in Bezug auf s und t homogen ist, daher nach dem vorigen §. integrirt werden kann.

§. 166.

Wenn eine Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Größen nur aus zwei Theilsätzen besteht, so hat die Abtheilung nach Funktionen dieser veränderlichen Größen keine Schwierigkeit; denn aus der allgemeinsten Gleichung dieser Art zwischen zwei veränderlichen Größen $Ax^h y^i dx = Bx^f y^g dy$ folgt, indem wir durch $y^i x^f$ dividiren, $Ax^{h-f} dx = By^{g-i} dy$ deren Integral ist $\frac{Ax^{h-f+1}}{h-f+1} = \frac{By^{g-i+1}}{g-i+1} + \text{const.}$

Nicht so verhält es sich, wenn die Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Größen aus drei Theilsätzen besteht. Die allgemeinste Gleichung dieser Art erscheint unter der Gestalt: $Au^i z^l dz + Bu^g z^h du = Cu^e z^f du$; wir können dieselbe jedoch auf folgende Art unter eine einfache Ge-

stalt bringen. Dividiren wir nämlich vorerst durch $Au^i z^f$, so verwandelt sie sich in

$$z^{l-f}\,dz + \frac{B}{A}\,u^{g-i}\,z^{h-f}\,du = \frac{C}{A}\,u^{e-i}\,du;$$ setzen wir

jetzt $y = z^{l-f+1}$, $x = u^{g-i+1}$, also $\frac{dy}{l-f+1} = z^{l-f}\,dz$,

$\frac{dx}{g-i+1} = u^{g-i}\,du$, so verwandelt sich die Gleichung in

$$dy + \frac{B(l-f+1)}{A(g-i+1)}\,y^{\frac{h-f}{l-f+1}}\,dx = \frac{C(l-f+1)}{A(g-i+1)}\,x^{\frac{e-i}{g-i+1}}\,dx,$$

setzen wir jetzt $\frac{B(l-f+1)}{A(g-i+1)} = a$, $\frac{C(l-f+1)}{A(g-i+1)} = b$,

$\frac{h-f}{l-f+1} = n$, $\frac{e-i}{g-i+1} = m$, so erscheint diese Gleichung unter der Gestalt $dy + ay^n\,dx = bx^m\,dx$. Das Integral dieser Gleichung haben wir schon §. 162. bestimmt für den Fall, wenn $n = 1$.

§. 167.

Es sey nun $n = 2$, also das Integral von $dy + ay^2\,dx = bx^m\,dx$ zu bestimmen. Diese Gleichung wurde zuerst von Riccati betrachtet, und ist daher unter dem Namen der Riccati'schen Gleichung bekannt.

Wenn $m = o$, so hat die Sonderung der veränderlichen Größen keine Schwierigkeit; es ist dann nämlich $dy + ay^2\,dx = b\,dx$, daher $dx = \frac{dy}{b - ay^2}$, folglich

$x = \int \frac{dy}{b - ay^2}$; dieses Integral erscheint nach §. 113. unter einer logarithmischen Gestalt, wenn die beiden Theilsätze des Nenners mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind; dagegen erscheint es unter einer trigonometrischen Gestalt, wenn die Zeichen dieser beiden Theilsätze dieselben sind.

Versuchen wir nun, durch Substitution die allgemeine Riccati'sche Gleichung unter eine homogene Gestalt zu bringen. Setzen wir $y = z^r$, also $dy = r\,z^{r-1}\,dz$, so ver-

wandelt sich diese Gleichung in $rz^{r-1}\,dz + az^{2r}\,dx = bx^m\,dx$; damit diese Gleichung homogen sey, so muß $r-1=2r=m$ seyn, woraus vorerst $r=-1$ folgt, außerdem muß aber $m=-2$ seyn; also nur dann, wenn dieses Letztere statt findet, führt uns diese Substitution zu einer homogenen Gleichung. Es ist in diesem Falle für $y=z^{-1}=\frac{1}{z}$ die transformirte Gleichung:

$$-\frac{dz}{z^2}+\frac{a\,dx}{z^2}=\frac{b\,dx}{x^2},\quad x^2\,dz+(bz^2-ax^2)\,dx=0,$$

deren Integral wir nach §. 164. bestimmen.

Versuchen wir nun eine allgemeinere Substitution; setzen wir $y=Ax^p+x^q z$, so folgt daraus $dy=(Apx^{p-1}+qx^{q-1}z)\,dx+x^q\,dz$, und $y^2=A^2x^{2p}+2Ax^{p+q}z+x^{2q}z^2$; substituiren wir diese Werthe, so verwandelt sich die Riccati'sche Gleichung in $x^q\,dz+(Apx^{p-1}+aA^2x^{2p})\,dx+(qx^{q-1}+2aAx^{p+q})+ax^{2q}z^2\,dx=bx^m\,dx$; diese Gleichung wird nur aus drei Theilsätzen bestehen, wenn wir die unbestimmten beständigen Größen so annehmen, daß

$$p-1=2p,\quad Ap+aA^2=0,\quad q-1=p+q,\quad q+2Aa=0.$$

Sowohl aus der ersten, als auch aus der dritten dieser Gleichungen folgt $p=-1$; setzen wir diesen Werth in die zweite Gleichung, so folgt daraus $A=\frac{1}{a}$; setzen wir diesen Werth in die vierte Gleichung, so folgt daraus $q=-2$; es ist also $y=\frac{1}{ax}+\frac{z}{x^2}$, und die transformirte Gleichung $x^{-2}\,dz+ax^{-4}z^2\,dx=bx^m\,dx$, welche also homogen seyn wird, wenn $m=-2$. Multipliziren wir diese Gleichung durch x^2, so wird sie $dz+\frac{az^2\,dx}{x^2}=bx^{m+2}\,dx$; wir erkennen jetzt, daß sie leicht gesondert werden kann, wenn $m=-4$, denn es ist dann $dz+\frac{az^2\,dx}{x^2}=\frac{b\,dx}{x^2}$, woraus $\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{b-az^2}$ folgt.

Setzen wir $z = \frac{1}{y}$, so verwandelt sich die transformirte Gleichung in $-dy' + \frac{a\,dx}{x^2} = b\,y'^2\,x^{m+2}\,dx$;

setzen wir $x' = x^{m+3}$, also $dx = \frac{dx'}{(m+3)\,x^{m+2}}$

$= \frac{1}{m+3}\,x'^{-\frac{m+2}{m+3}}\,dx'$, so verwandelt sich die vorige Gleichung in $dy' + \frac{b}{m+3}\,y'^2\,dx' = \frac{a}{m+3}\,x'^{-\frac{m+4}{m+3}}\,dx'$;

setzen wir nun, um abzukürzen,

$\frac{b}{m+3} = a'$, $\frac{a}{m+3} = b'$, $-\frac{m+4}{m+3} = m'$, so kömmt diese Gleichung unter die Gestalt

$dy' + a'\,y'^2\,dx' = b'\,x'^{m'}\,dx'$, welche unter der Gestalt der ursprünglichen Gleichung erscheint; wenn also $m' = -\frac{m+4}{m+3} = -4$, so werden wir durch die Substitution $y' = \frac{1}{a'\,x'} + \frac{z'}{x'^2}$ die Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher wir die veränderlichen Größen zu sondern im Stande sind.

Wenn aber m' nicht $= -4$, so setzen wir abermals

$z' = \frac{1}{y''}$, $x'' = x'^{m+3}$, $\frac{b'}{m'+3} = a''$, $\frac{a'}{m'+3} = b''$, $-\frac{m'+4}{m'+3} = m''$, und gelangen so auf dieselbe Weise zu der Gleichung $dy'' + a''\,y''^2\,dx'' = b''\,x''^{m''}\,dx''$; wenn $m'' = -4$, so wird dieselbe gleichfalls vermittelst der Substitution $y'' = \frac{1}{a''\,x''} + \frac{z''}{x''^2}$ sich in eine andere verwandeln lassen, in welcher die veränderlichen Größen gesondert werden können.

Wenn also in der Reihefolge der Exponenten

$m, m' = -\frac{m+4}{m+3}$, $m'' = -\frac{m'+4}{m'+3}$, $m''' = -\frac{m''+4}{m''+3}$,

u. s. w., sich einer befindet, welcher $= -4$, so wird vermittelst dieser auf einander folgenden Substitutionen die Riccati'sche Gleichung integrirt werden können. Indem wir nach und nach annehmen, daß m, m', m'', m''', u. s. w., diesen Werth haben, so erhalten wir für m die Werthe $-4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{7}, \ldots$, welche im allgemeinen unter der Form $m = -\frac{4r}{2r-1}$ begriffen sind, welches r eine beliebige ganze und positive Zahl vorstellt.

Wenn wir in der ursprünglichen Riccati'schen Gleichung $y = \frac{1}{y'}$ setzen, so verwandelt sie sich in $dy' + by'^2 x^m dx = a dx$; setzen wir $x^{m+1} = x'$, $\frac{b}{m+1} = a'$, $\frac{a}{m+1} = b'$, $-\frac{m}{m+1} = m'$, so verwandelt sich diese Gleichung in $dy' + a' y'^2 dx' = b' x'^{m'} dx'$, und wird also vermittelst der vorhin angedeuteten Substitution integrirt werden können, wenn $m' = \frac{-4i}{2i-1}$, d. h., $-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}$, daher $m = -\frac{4i}{2i+1}$; wenn also im allgemeinen der Werth von m unter der Gestalt $-\frac{4i}{2i \pm 1}$ begriffen ist, so wird die Riccati'sche Gleichung vermittelst einer Aufeinanderfolge von Substitutionen integrirt werden können. Die Fälle jedoch, in welchen diese Form unter einer Bruchgestalt erscheint, sind so sehr speziell, daß sehr selten einer derselben in der Anwendung vorkömmt.

§. 168.

In dem Bisherigen haben wir die hauptsächlichsten allgemeineren integrirbaren Gleichungen dieser Art betrachtet. Es lassen sich zwar vermittelst einer dazu geeigneten Substitution manche speziellere Gleichungen dieser Art integriren, die Art der vorzunehmenden Substitution hängt jedoch

immer von der Beschaffenheit der zu integrirenden Gleichung ab, und es lassen sich daher darüber keine allgemeine Regeln aufstellen.

Es sey, z. B.,

$$\alpha\, y\, dx + \beta\, x\, dy + x^m y^n (\gamma\, y\, dx + \delta\, x\, dy) = 0.$$

Dividiren wir durch xy, so ist

$$\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} + x^m y^n \left(\gamma \frac{dx}{x} + \delta \frac{dy}{y}\right) = 0.$$

Da $\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} = d \,.\, \log. x^\alpha + d \,.\, \log. y^\beta = d \,.\, \log. (x^\alpha y^\beta)$, und $\gamma \frac{dx}{x} + \delta \frac{dy}{y} = d \,.\, \log. x^\gamma + d \log. y^\delta = d \,.\, \log. (x^\gamma y^\delta)$, so werden wir dadurch veranlaßt, $x^\alpha y^\beta = u$, $x^\gamma y^\delta = v$ zu setzen, woraus $\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$, $\gamma \frac{dx}{x} + \delta \frac{dy}{y} = \frac{dv}{v}$, und $x^m y^n = u^{\frac{m\delta - n\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}} v^{\frac{n\alpha - m\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}}$ folgt; substituiren wir diese Werthe, so ist

$$\frac{du}{u} + u^{\frac{m\delta - n\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}} v^{\frac{n\alpha - m\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} \frac{dv}{v} = 0,$$

$$u^{\frac{n\gamma - m\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} du + v^{\frac{n\alpha - m\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} dv = 0;$$ das Integral dieser Gleichung ist $\frac{u^{\frac{n\gamma - m\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}}}{n\gamma - m\delta} + \frac{v^{\frac{n\alpha - m\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}}}{n\alpha - m\beta} = \text{const.}$, in welche Gleichung wir nur noch statt u und v ihre Werthe zu setzen haben.

Da die Bestimmung des Faktors, durch welchen eine Differentialgleichung multiplizirt, unter eine solche Gestalt kömmt, daß sie den Bedingnissen der direkten Integrabilität Genüge leistet, nur in einigen speziellen Fällen möglich ist, so bestrebte sich Euler, die umgekehrte Aufgabe aufzulösen; er nahm nämlich diesen Faktor als bekannt an, und untersuchte nun, welche Differentialgleichungen unter eine direkt integrirbare Gestalt kommen, wenn man sie durch denselben multiplizirt. Da dieses Verfahren jedoch nur zu der Inte-

gration einiger sehr speziellen Differentialgleichungen führt, so wollen wir uns dabei nicht verweilen.

Von der genäherten Bestimmung eines Integrals zwischen gegebenen Gränzen.

§. 169.

Ein jedes Integral von der ersten Ordnung ist in doppelter Hinsicht unbestimmt. Denn vorerst kömmt in demselben die willkürliche Constante vor, deren Werth wir erst dann bestimmen, wenn gegeben ist, für welchen bestimmten Werth von $x = a$ das Integral verschwindet; außerdem muß aber noch gegeben seyn, bis zu welcher Gränze hin, entsprechend einem $x = b$, das Integral zu nehmen ist.

Das Integral wird daher ein unbestimmtes genannt, wenn diese Gränzen nicht gegeben sind, und es muß, damit es vollständig sey, eine willkürliche Constante enthalten; wenn aber diese Gränzen gegeben sind, so ist das Integral ein bestimmtes, und man drückt dieses aus, indem man sagt, daß es von $x = a$ bis zu $x = b$ zu nehmen sey.

Das zu bestimmende Integral sey $\int X dx$; es sey Y der entweder unter einer endlichen Gestalt oder durch eine unendliche Reihe ausgedrückte veränderliche Theil dieses Integrals, so ist $\int X dx = Y + \text{const.}$ Es sey (Fig. 19.) $ABCDE$ die krumme Linie, deren Lauf durch die Gleichung $y = X$, bezogen auf die rechtwinkligen Coordinatenaxen X und Y, bestimmt wird, so ist $\int X dx = Y + \text{const.}$ = (§. 152.) dem zwischen zwei Ordinaten, der Axe X und dem Bogen der krummen Linie eingeschlossenen Segmente derselben. So lange die Abszissen, welchen die das Segment begränzenden Ordinaten entsprechen, nicht gegeben sind, so wird auch die Ausdehnung desselben nach den beiden Richtungen der Axe X hin unbestimmt seyn; sie ist erst dann bestimmt, wenn diese Abszissen $x = a$ und $x = b$ gegeben sind. Wenn nämlich das Segment bei

der Ordinate, deren $x = a$, beginnt, so verschwindet das Integral für $x = a$; es sey A der bestimmte Werth, welchen Y durch diese Substitution erhält, so ist $o =$ const. $+ A$, folglich const. $= - A$, daher $\int X\,dx = Y - A$; da ferner das Integral bis zu der Ordinate, welche $x = b$ entspricht, zu nehmen ist, so erhalten wir, wenn Y dadurch den bestimmten Werth A' erhält, von $x = a$ bis zu $x = b$, $\int X\,dx = A' - A$.

Diese Bestimmungsweise können wir uns auch noch auf die folgende Art deutlich machen. Es seyen BF und EI die Ordinaten, welche den Abszissen $x = a$ und $x = b$ entsprechen. Das zwischen BF und einer willkürlichen Ordinate PQ eingeschlossene Segment erhalten wir, indem wir in dem Integrale $x = a$ setzen, es ist also $= A$ + const.; das zwischen derselben Ordinate PQ und EI eingeschlossene Segment erhalten wir, indem wir in dem Integrale $x = b$ setzen, es ist also $= A' +$ const.; das zwischen den Ordinaten BF und EI eingeschlossene Segment ist die Differenz dieser beiden Segmente, es ist also $= A' - A$.

§. 170.

Es sey nun der Werth von $\int X dx$ zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ durch eine allgemeine Reihe auszudrücken; es sey $b > a$.

Es stelle Y den Werth des Integrals für $x = a$, und Y' den Werth des Integrals für $x = b$ vor, so ist klar, daß Y sich in Y' verwandelt, wenn wir b statt a, oder, was dasselbe ist, wenn wir $a + b - a$ statt a setzen. Angenommen, daß für $x = a$ die Differentialquotienten $\frac{dY}{dx} = X$, $\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}$, $\frac{d^3Y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}$, ... die bestimmten Werthe A, B, C .... erhalten, so folgt aus dem Taylor'schen Lehrsatze, daß

$$Y' = Y + A(b-a) + B\frac{(b-a)^2}{2} + \frac{C(b-a)^3}{2.3} + \ldots;$$

es ist also der Werth des Integrals zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$:

$$Y' - Y = A(b-a) + B\frac{(b-a)^2}{2} + C\frac{(b-a)^3}{2.3} + \ldots.$$

Diese Reihe wird nur dann stark konvergiren, wenn $b - a$ nur ein kleiner Bruch ist; wir können jedoch auf folgende Weise das Integral durch eine Reihe berechnen, deren größere oder geringere Convergenz ganz von unserer Willkür abhängt.

Es sey $b - a = n\alpha$, daher $\alpha = \frac{b-a}{n}$, so können wir immer die Zahl n so groß annehmen, daß α nur ein kleiner Bruch ist. Berechnen wir nun den Werth des Integrals zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = a + \alpha$, welcher $= Z$ sey; sodann zwischen den Gränzen $x = a + \alpha$ und $x = a + 2\alpha$, welcher $= Z'$ sey;

. . . . . .

und endlich zwischen den Gränzen $x = a + (n-1)\alpha$ und $x = a + n\alpha$, welcher $= Z^{(n-1)}$ sey; die Werthe der Differentialquotienten für

$x = a$, $x = a + \alpha$, $x = a + 2\alpha$, ... $x = a + (n-1)\alpha$

seyen

A, B, C, u. s. w., A', B', C', u. s. w., A'', B'', C'', u. s. w.,....

$A^{(n-1)}$, $B^{(n-1)}$, $C^{(n-1)}$, u. s. w., so erhalten wir nach dem Vorhergehenden

$$Z = A\alpha + \frac{B\alpha^2}{2} + C\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$Z' = A'\alpha + B'\frac{\alpha^2}{2} + C'\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$Z'' = A''\alpha + B''\frac{\alpha^2}{2} + C''\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots\ldots\ldots,$$

. . . . . .

$$Z^{(n-1)} = A^{(n-1)}\alpha + B^{(n-1)}\frac{\alpha^2}{2} + C^{(n-1)}\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots\ldots$$

Nun ist aber offenbar

$$Y' - Y = Z + Z' + Z'' + \ldots\ldots\ldots + Z^{n-1};$$

denn $Y' - Y$ ist gleich dem Segmente, begriffen zwischen den Ordinaten, welche den Abszissen $x = a$ und $x = b$ entsprechen; dieses Segment ist aber zusammengesetzt aus den Segmenten $Z, Z', Z'', \ldots Z^{(n-1)}$, begriffen zwischen den auf einander folgenden Ordinaten, welche den Abszissen $x = a,\ x = a + \alpha,\ x = a + 2\alpha \ldots x = a + (n-1)\alpha,$ $x = a + n\alpha = b$ entsprechen; es ist also

$$Y' - Y = \alpha\,(A + A' + A'' + \ldots\ldots + A^{(n-1)})$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2}\,(B + B' + B'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + B^{(n-1)})$$
$$+ \frac{\alpha^3}{2.3}\,(C + C' + C'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + C^{(n-1)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 171.

Wenn α so klein ist, daß wir die höhern Potenzen von α vernachlässigen können, so ist der Werth des Integrals zwischen den angegebenen Gränzen

$$Y' - Y = \alpha\,(A + A' + A'' + \ldots\ldots + A^{(n-1)}).$$

Es sey A (Fig. 23.) der Ursprung der Coordinaten, die Abszissen $AB = a,\ AD = a + \alpha, \ldots AH = a + (n+1)\alpha;$ so sind die diesen Abszissen entsprechenden Ordinaten der krummen Linie $BC = A,\ DE = A', \ldots HI = A^{(n-1)}$; es ist also $\alpha\,(A + A' + \ldots + A^{(n-1)}) =$ der Summe der Rechtecke $BDMC + DFNE \ldots + HKPI.$

Wir erhalten nun aber offenbar ein Resultat, welches von dem Segmente $BCLK$, d. i., von dem Integrale zwischen den angegebenen Gränzen noch weniger verschieden ist, indem wir statt der Summe dieser Rechtecke die Summe der eingeschriebenen Trapezien $BDEC, DFGE, \ldots ILKH$ annehmen; es sey nun $LK = A^{(n)}$ die Ordinate, welche wir erhalten, indem wir $a + n\alpha = b$ statt x in $y = X$ setzen, so sind die Trapezien

$$BCED = \alpha \cdot \frac{A + A'}{2}, \quad DEGF = \alpha \cdot \frac{A' + A''}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots HILK = \alpha \cdot \frac{A^{(n-1)} + A^{(n)}}{2},$$

es ist also die Summe dieser eingeschriebenen Trapezien

$$= Y' - Y = \alpha \left(\frac{A + A^n}{2} + A' + \ldots + A^{(n-1)} \right).$$

§. 172.

Die direkte Anwendbarkeit dieses Verfahrens findet nicht mehr statt, wenn für einen der beiden Werthe $x = a$ und $x = b$ der Differentialquotient unendlich groß wird; denn die Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist für einen solchen speziellen Fall nicht mehr anwendbar (§. 53.). In solchen Fällen müssen wir das vorliegende Integral auf ein anderes zu beziehen suchen, in welchem der bemerkte Umstand nicht mehr eintritt.

Es sey, z. B., $\int dx \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$ zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ zu bestimmen; da gegenwärtig für $x = 1$ der Differentialquotient $\sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$ unendlich groß wird, so können wir unser Verfahren nicht mehr direkt anwenden. Bemerken wir aber, daß

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc. sin. } x, \quad d \cdot \sqrt{1 - e^2 x^2} = - \frac{e^2 x\, dx}{\sqrt{1 - e^2 x^2}},$$

so erhalten wir nach §. 135.

$$\int dx \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}} + \text{arc.sin.} x \sqrt{1 - e^2 x^2} + e^2 \int \text{arc.sin.} x \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - e^2 x^2}}.$$

Der Werth des entwickelten Theiles dieses Integrals ist für $x = 0$ auch $= 0$, und für $x = 1$ ist er $= \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - e^2}$, er ist also zwischen diesen Gränzen $\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - e^2}$; um nun $\int \text{arc. sin. } x \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - e^2 x^2}}$ zwischen diesen Gränzen zu bestimmen, so setzen wir $a = 0$, $b = 1$, und

$n =$ z. B., 5, also $\alpha = \frac{1-0}{5} = 0,2$; setzen wir nun nach und nach $x = 0$, $x = 0,2$, $x = 0,4$, $x = 0,6$, $x = 0,8$, $x = 1,0$ in $X = \frac{x \text{ arc. sin. } x}{\sqrt{1-e^2x^2}}$, so erhalten wir:

$$A = 0,$$

$$A' = \frac{0,2 \text{ arc. sin. } 0,2}{\sqrt{1-0,04e^2}},$$

$$A'' = \frac{0,4 \text{ arc. sin. } 0,4}{\sqrt{1-0,16e^2}},$$

$$A''' = \frac{0,6 \text{ arc. sin. } 0,6}{\sqrt{1-0,36e^2}},$$

$$A'^{v} = \frac{0,8 \text{ arc. sin. } 0,8}{\sqrt{1-0,64e^2}},$$

$A^{v} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-e^2}}$; es ist also zwischen den angegebenen Gränzen

$$\int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1-e^2} + e^2\left(\frac{A^{v}}{2} + A' + A'' + A''' + A'^{v}\right).$$

Von der Integration der Differentialgleichungen, welche von der ersten Ordnung und von höhern Graden sind.

§. 173.

Die allgemeinste Gleichung, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen, muß immer unter der Gestalt erscheinen: $dy^n + Q\,dy^{n-1}dx + \ldots T\,dy\,dx^{n-1} + U\,dx^n = 0$, d. h., sie muß in Bezug auf dx und dy homogen seyn; denn wenn sie dieses nicht wäre, so würden die Theilsätze, welche in Bezug auf dx und dy von einer höheren Dimension sind, sich gegen die Theilsätze von einer niederen

Dimension als verschwindend kleine von einer höheren Ordnung aufheben.

Dividiren wir diese Gleichung durch dx^n, so kömmt sie unter die Gestalt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + U = 0;$$

wenn wir also die Wurzeln von $\frac{dy}{dx}$ durch eine Funktion von x, y und bekannten Größen auszudrücken im Stande sind, so erhalten wir die n Werthe von $\frac{dy}{dx}$, und durch Integration derselben n ursprüngliche Gleichungen zwischen x und y, wovon eine jede als das Integral der gegebenen Differentialgleichung zu betrachten ist.

Es sey, z. B., $dy^2 = a^2\,dx^2$, so folgt daraus sowohl $dy = a\,dx$, als auch $dy = -a\,dx$, deren Integrale $y = ax + c$, und $y = -ax + c'$ sind.

Wir können jedoch ein Integral finden, in welchem die beiden so eben bestimmten begriffen sind; da nämlich $dy = \pm a\,dx$, so ist $y = \pm ax + C$, $y - C = \pm ax$, daher $(y - C)^2 = a^2\,x^2$.

Es sey $dy^2 = ax\,dx^2$, so folgt daraus $dy = dx\sqrt{ax}$, $dy = -dx\sqrt{ax}$, daher $y = +\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + c$, und $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + c'$. Das Integral, in welchem die beiden so eben gefundenen begriffen sind, bestimmen wir leicht, indem wir bemerken, daß $dy = \pm dx\sqrt{ax}$, daher $y = \pm\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + C$, $y - C = \pm\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$, folglich $(y - C)^2 = \frac{4}{9}ax^3$, welches die Gleichung der zweiten kubischen Parabel ist, deren Spitze auf der Axe Y liegt, und sich in einer Entfernung C von dem Ursprunge der Coordinaten befindet; die beiden aus den gesonderten Wer-

then von $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Integralen sind die Gleichungen der beiden Äste dieser Parabel. Hieraus ist leicht im allgemeinen einzusehen, daß, wenn wir uns die Curve, aus deren Gleichung die gegebene Differentialgleichung entsteht, verzeichnet vorstellen, die aus den gesonderten Werthen von $\frac{dy}{dx}$ gezogenen Integralen den Ästen angehören, aus welchen die krumme Linie besteht.

§. 174.

Wir wollen nun sehen, auf welche Weise wir, wenn dieses möglich ist, aus der Differentialgleichung das allgemeine Integral herleiten, ohne dieselbe nach $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen.

Diese Herleitung hat keine Schwierigkeit, wenn die in der allgemeinen Gleichung vorkommenden Coeffizienten $Q, R \ldots U$ der Potenzen von dx und dy alle beständige Größen sind.

Es ist klar, daß dann die Wurzeln der Gleichung auch nur Funktionen von beständigen Größen sind; setzen wir also $dy = m\,dx$ in diese Gleichung, so erhalten wir

$$m^n + Pm^{n-1} + \ldots + Tm + U = 0.$$

Aus $dy = m\,dx$ folgt aber, wenn C eine willkürliche Constante vorstellt, $y = mx + C$, daher $m = \frac{y-C}{x}$; setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung, so erhalten wir ihr allgemeines Integral

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^n + Q\left(\frac{y-C}{x}\right)^{n-1} + \ldots + T\left(\frac{y-C}{x}\right) + U = 0;$$

wir finden also dieses Integral, indem wir in die Differentialgleichung $\frac{y-C}{x}$ statt $\frac{dy}{dx}$ setzen.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $dy^2 = a^2\,dx^2$,

so ist ihr Integral $\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 = a^2$, $(y-C)^2 = a^2 x^2$, wie wir auch in dem vorigen §. gefunden haben.

Es sey die Differentialgleichung

$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{a\,dy^2}{dx} + dy$, so ist ihr Integral

$$\sqrt{1+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2} = a\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \frac{y-C}{x},$$

$$\sqrt{x^2+(y-C)^2} = a\,(y-C)^2 + x\,(y-C).$$

§. 175.

Wenn in der Differentialgleichung nur die eine der veränderlichen Größen, z. B., x, vorkömmt, so können wir daraus $\frac{dy}{dx}$ = einer Funktion von x allein = X ableiten; es ist also $dy = X\,dx$, folglich $y = \int X\,dx$.

Öfters ist es aber einfacher, die Gleichung nach x, als nach $\frac{dy}{dx}$, aufzulösen. Setzen wir also $\frac{dy}{dx} = p$, so erhalten wir x = einer Funktion von p = P; aus $dy = p\,dx$ folgt aber (§. 135.) $y = \int p\,dx = px - \int x\,dp = px - \int P\,dp$; das Resultat der Elimination von p zwischen dieser Gleichung und der Gleichung x = P wird das gesuchte Integral seyn.

Es sey, z. B., $x\sqrt{dx^2+dy^2} = a\,dy$; setzen wir $dy = p\,dx$, so ist $x\sqrt{1+p^2} = ap$, daher $x = P = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$; es ist also

$$y = px - a\int\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = (\text{§. 126., 1})\; px - a\sqrt{1+p^2} + C;$$

aus der Gleichung $x\sqrt{1+p^2} = ap$ folgt aber $p = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; substituiren wir diesen Werth, so erhalten wir das gesuchte Integral $y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} + C$, und nach den gehörigen Reduktionen $(y-C)^2 = a^2 - x^2$.

§. 176.

Wenn die Differentialgleichung in Bezug auf x und y homogen ist, so verschwinden aus derselben, indem wir $y = ux$ setzen, diese beiden veränderlichen Größen; die Gleichung findet also nur noch, indem wir $\frac{dy}{dx} = p$ setzen, zwischen p und u statt; wir können also aus derselben statt p seinen durch eine Funktion von u, oder statt u seinen durch eine Funktion von p ausgedrückten Werth herleiten.

Aus $y = ux$ folgt $dy = u\,dx + x\,du$, $p\,dx = u\,dx + x\,du$, $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, daher $\log. x = \int \frac{du}{p-u}$, $x = e^{\int \frac{du}{p-u}}$, folglich $y = u \cdot e^{\int \frac{du}{p-u}}$.

Es ist

$$\int \frac{du}{p-u} = -\int \frac{dp-du}{p-u} + \int \frac{dp}{p-u}, = -\log.(p-u) + \int \frac{dp}{p-u},$$

daher $\log. x = -\log.(p-u) + \int \frac{dp}{p-u}$; dieser Formel können wir uns bedienen, wenn wir u durch eine Funktion von p ausdrücken.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $y\,dx - x\,dy = nx\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Setzen wir $y = ux$, und $dy = p\,dx$, so ist $u - p = n\sqrt{1+p^2}$, daher $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = -\frac{du-dp}{u-p} - \frac{dp}{u-p}$

$$= -d\log.(u-p) - \frac{1}{n}\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich

$$\log. x = \text{const.} - \log.(n\sqrt{1+p^2}) - \frac{1}{n}\log.(p+\sqrt{1+p^2})$$

$$= \log. \frac{c\,(p+\sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}}}{n\sqrt{1+p^2}},$$

indem wir const. $= \log. c$

setzen; es ist also $x = \frac{c\,(p + \sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}}}{n\,\sqrt{1+p^2}}$, folglich

$$y = ux = \frac{c\,(p + \sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+p^2}}\,(p + n\,\sqrt{1+p^2}).$$

Indem wir zwischen diesen beiden Gleichungen p eliminiren, so erhalten wir die Gleichung zwischen x und y, welche das gesuchte Integral ist. Diese Elimination wird nun freilich in dem gegenwärtigen Falle beschwerlich seyn; die beiden Gleichungen zwischen x, y und p zusammen betrachtet stellen aber eben so gut das Integral der Differentialgleichung vor, als eine einzige Gleichung zwischen x und y.

§. 177.

Wenn in der allgemeinen Differentialgleichung zugleich die beiden veränderlichen Größen vorkommen, so ist die Integration in den meisten Fällen sehr beschwerlich. Betrachten wir hier den Fall, wenn die eine der beiden veränderlichen Größen, z. B., y nur in der ersten Potenz vorkömmt.

Setzen wir wieder $dy = p\,dx$; nehmen wir in der gegebenen Differentialgleichung den Werth von y, und differentiiren wir sodann, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt $dy = R\,dx + T\,dp$, welches R und T Funktionen von x und p sind; es ist also $p\,dx = R\,dx + T\,dp$; nachdem wir diese Gleichung integrirt haben, so eliminiren wir zwischen dem erhaltenen Integrale und der gegebenen Differentialgleichung, in welcher $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wurde, dieses p, und erhalten so die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y.

Wenn eine Gleichung dieser Art unter die Gestalt $y = px + P$ gebracht werden kann, und wenn P nur eine Funktion von p ist, so folgt daraus durch Differentiation $dy = p\,dx + x\,dp + \frac{dP}{dp}\,dp$, welche Gleichung wegen $dy = p\,dx$ gleichbedeutend ist mit

$dp\left(x+\frac{dP}{dp}\right)=o$; dieser Gleichung leisten wir Genüge sowohl durch $dp=o$, als auch durch $x+\frac{dP}{dp}=o$.

Wenn wir zwischen dieser letzteren Gleichung und der ursprünglichen Differentialgleichung p eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, in welcher keine willkürliche Constante vorkömmt, und welche daher auch nicht das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung seyn kann (§. 169.). Aus $dp=o$ folgt $p=$ einer Constante $=c$; setzen wir diesen Werth in die ursprüngliche Differentialgleichung, und stellen wir durch C dasjenige vor, was P wird, indem wir $p=c$ setzen, so erhalten wir das gesuchte Integral $y=cx+C$.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $y\,dx-x\,dy=a\sqrt{dx^2+dy^2}$, welche gleichbedeutend ist mit $y=px+a\sqrt{1+p^2}$. Wir erhalten gegenwärtig durch Differentiation $dp\left(x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)=o$, welcher Gleichung sowohl durch $dp=o$, als durch $\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+x=o$ Genüge geleistet wird. Aus der letzteren Gleichung folgt $p=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; setzen wir diesen Werth in die ursprüngliche, so ist $y=-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$, $y^2+x^2=a^2$, in welcher Gleichung keine willkürliche Constante vorkömmt. Aus $dp=o$ folgt $p=o$; setzen wir diesen Werth in die ursprüngliche Gleichung, so ist $y=+cx+a\sqrt{1+c^2}$, welches das gesuchte Integral ist.

Es sey die Differentialgleichung $y\,dx^2=x(dy^2+dx^2)$, woraus $y=x(1+p^2)$ folgt, so ist $dy=dx(1+p^2)+2pxdx=p\,dx$, daher $\frac{dx}{x}=-\frac{2p\,dp}{p^2-p+1}$, folglich

$$\log. x = \text{const.} - 2\int \frac{p\,dp}{p^2 - p + 1} = \text{(§. 114.)}$$

$$\text{const.} - \frac{1}{2}\log.(p^2 - p + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc. tg.}\,\frac{2p-1}{\sqrt{3}};$$

indem wir nun in diese Gleichung den aus der ursprünglichen gezogenen Werth $p = \pm\sqrt{\frac{y-x}{x}}$ setzen, so erhalten wir das gesuchte Integral.

Von den besonderen Auflösungen.

§. 178.

Wir haben §. 169. gesehen, daß das Integral einer Differentialgleichung von der ersten Ordnung, um vollständig zu seyn, eine willkürliche Constante enthalten muß. Sobald dieser Constante ein bestimmter Werth beigelegt wird, so ist das Integral nur noch ein besonderer Fall des vollständigen Integrals; ein solches Integral, in welchem die Constante einen bestimmten Werth erhalten hat, wird daher ein besonderes Integral genannt. Da wir in dem vollständigen Integrale der Constante einen jeden beliebigen bestimmten Werth geben können, so ist klar, daß einer jeden Differentialgleichung eine unendliche Anzahl besonderer Integrale angehört.

Wenn nun eine endliche Gleichung zwischen x und y, welche keine willkürliche Constante enthält, und welche wir durch $F(x, y) = o$ vorstellen wollen, einer gegebenen Differentialgleichung Genüge leistet, und wenn deren vollständiges Integral $f(x, y, c) = o$ ist, welches c die willkürliche Constante vorstellt, so wird die Gleichung $F(x,y) = o$ ein besonderes Integral seyn, wenn es möglich ist, c einen solchen bestimmten Werth beizulegen, daß $f(x, y, c) = o$ sich in $F(x, y) = o$ verwandelt.

Wenn aber die Gleichung $f(x, y, c) = o$ nicht in $F(x, y) = o$ umgewandelt werden kann, wir mögen c einen bestimmten Werth geben, wie wir nur wollen, so

nennt man die Gleichung $F(x, y) = o$ eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung. Die Anzahl der einer Differentialgleichung Genüge leistender besonderer Integrale ist immer, wie wir so eben sahen, unendlich groß; dagegen die Anzahl ihrer besonderen Auflösungen ist immer, wie wir sogleich sehen werden, begränzt.

So haben wir (§. 177.) aus der Differentialgleichung $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2+dy^2}$ die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ hergeleitet, in welcher keine willkürliche Constante vorkömmt; das vollständige Integral jener fanden wir $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$; welchen bestimmten Werth wir auch der willkürlichen Constante c geben, so wird diese Gleichung doch nie in $x^2 + y^2 = a^2$ umgewandelt werden können; es ist also $x^2 + y^2 = a^2$ eine besondere Auflösung der Differentialgleichung.

§. 179.

Wenn das vollständige Integral $u = f(x, y, c) = o$ einer Differentialgleichung bekannt ist, so hat es keine Schwierigkeit, die besonderen Auflösungen zu bestimmen, deren sie fähig ist.

Die Differentialgleichung, welcher das vollständige Integral Genüge leistet, ist $\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = o$; in derselben wird die willkürliche Constante c nicht vorkommen. Differentiiren wir nun die vollständige Integralgleichung, indem wir auch c als veränderlich betrachten, so ist

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dc}\,dc = o.$$

Damit diese Gleichung mit der ursprünglichen Differentialgleichung übereinstimme, so muß $\frac{du}{dc}\,dc = o$; dieses wird vorerst stattfinden, wenn $dc = o$, also $c =$ einer beständigen Größe ist; es wird aber auch dieses stattfinden, wenn $\frac{du}{dc} = o$. Es sind nun zwei Fälle möglich.

1) Wenn in der Gleichung $\frac{du}{dc} = o$ nicht x und y, sondern nur c vorkömmt, so erhalten wir durch die Auflösung derselben für c bestimmte Werthe; substituiren wir dieselben in $f(x, y, c) = o$, so erfolgen daraus nur besondere Integrale der gegebenen Differentialgleichung.

2) Wenn aber in $\frac{du}{dc} = o$, x oder y, oder beide veränderliche Größen zugleich, vorkommen, so erhalten wir, wenn wir diese Gleichung nach c auflösen, und den Werth von c in $f(x, y, c) = o$ setzen, Gleichungen, welche nur zwischen x und y stattfinden, und welche der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten werden, weil für diese Gleichungen $\frac{du}{dc} = o$, also das Differential

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = o$$ ist. Um nun zu sehen, ob die so gefundenen Gleichungen besondere Integrale oder besondere Auflösungen sind, so eliminiren wir die eine der veränderlichen Größen x, y zwischen $\frac{du}{dc} = o$ und $f(x, y, c) = o$; wenn wir dadurch eine Gleichung nur zwischen c und beständigen Größen erhalten, so folgen daraus bestimmte Werthe für c, die vorhin gefundenen Gleichungen sind also dann nur besondere Integrale; wenn aber dadurch eine Gleichung entsteht, in welcher sich die andere veränderliche Größe noch befindet, so ist c veränderlich; die vorhin gefundenen Gleichungen sind also dann besondere Auflösungen der Differentialgleichung.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$, deren vollständiges Integral $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$, $y - cx - a\sqrt{1+c^2} = o$ ist; das Differential dieser Gleichung ist, indem wir c als veränderlich annehmen, $dy - c\,dx - dc\left(x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\right) = o$;

setzen wir $\frac{du}{dc} = x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = o$, so folgt daraus $1 + c^2 = \frac{a^2 c^2}{x^2}$, $c = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; substituiren wir diese Werthe in das vollständige Integral, so ist

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2}} = \frac{\pm x^2 + a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

also entweder $y = \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, oder $y = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, welche letztere Gleichung gleichbedeutend ist mit $y^2 + x^2 = a^2$; diese beiden Gleichungen sind also besondere Auflösungen der Differntialgleichung, weil wir zu denselben gelangt sind, indem wir c durch eine Funktion von x ausdrückten.

Es sey die Differentialgleichung $dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Wenn wir $x^2 + y^2 - a^2 = o$ setzen, so folgt daraus $d(x^2 + y^2 - a^2) = 2(x\,dx + y\,dy) = o$; wir leisten also dadurch der Differentialgleichung identisch Genüge.

Um nun zu sehen, ob dieses ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung ist, so bemerken wir, daß das vollständige Integral der Differentialgleichung $y + c = \sqrt{x^2+y^2-a^2}$, oder, indem wir quadriren und sodann reduziren, $x^2 - 2cy - a^2 - c^2 = o$ ist. Differentiiren wir diese Gleichung, indem wir auch c als veränderlich betrachten, so ist $2x\,dx - 2c\,dy - 2\,dc(c+y) = o$; setzen wir $\frac{du}{dc} = -2(c+y) = o$, so folgt daraus $c = -y$; setzen wir dieses in das vollständige Integral, so ist $x^2 + 2y^2 - a^2 - y^2 = o$, $x^2 + y^2 - a^2 = o$, welches also eine besondere Auflösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist, weil wir zu derselben durch die Substitution des veränderlichen Werthes $c = -y$ gelangten.

§. 180.

Die Methode des vorigen §. setzt voraus, daß das vollständige Integral der Differentialgleichung bekannt sey. Wir

wollen nun ein von der Kenntniß des vollständigen Integrals unabhängiges Verfahren aufsuchen, zu untersuchen, ob ein Werth $y = X$, welcher einer gegebenen Differentialgleichung Genüge leistet, ein besonderer Fall oder ein besonderes Integral ist.

Wenn $y = X$ ein besonderer Fall des vollständigen Integrals ist, und wenn C die in diesem vorkommende willkürliche Constante vorstellt, so muß sich dieses in jenes verwandeln, wenn wir C den zugehörigen bestimmten Werth, welcher C' sey, geben; wenn also $y = V$ das vollständige Integral vorstellt, so muß sich dasselbe entwickeln lassen unter der folgenden Gestalt:

$$V = X + V'(C - C')^{\alpha} + V''(C - C')^{\beta} + \ldots\ldots,$$

in welcher Entwickelung V', V'', u. s. w., Funktionen von x allein und nicht von C vorstellen, und die Exponenten $\alpha, \beta,$ u. s. w., alle positiv sind, und nach der Ordnung ihrer Größe auf einander folgen; denn indem wir $C = C'$ setzen, so verwandelt sich das vollständige Integral $y = V$ unter dieser Voraussetzung in das besondere Integral $y = X$.

Setzen wir $(C - C')^{\alpha} = h$, und sodann α statt $\frac{\beta}{\alpha}$, so ist h unbestimmt, weil C unbestimmt ist, und das neue $\alpha > 1$; es ist dann das vollständige Integral

$$y = V = X + V'h + V''h^{\alpha} + \ldots. = X + K,$$ indem wir $V'h + V''h^{\alpha} + \ldots. = K$ setzen.

Es sey nun $dy = p\,dx$ die gegebene Differentialgleichung, welcher nach Annahme die Gleichung $y = X$ Genüge leistet, so muß, wenn nämlich $y = X$ ein besonderes Integral ist, diese Gleichung identisch wahr seyn, indem wir statt y seinen vollständigen Werth $X + K$ setzen. Es sey nun $dX = P\,dx$, so muß die Entwickelung von p, indem wir $X + K$ statt X setzen, unter der Gestalt erscheinen: $P + P'K^{m} + P''K^{n} + \ldots.$; die Entwickelung sey so angeschrieben, daß die Exponenten m, n, ... nach der Ordnung ihrer Größe auf einander folgen; diese Exponenten müssen alle positiv seyn, denn wenn wir $K = o$ setzen, so

verwandelt sich der vollständige Werth von y in X, es wird also $dy = dX = P\,dx$.

Es verwandelt sich also hiernach $dy = p\,dx$ in $dX + dK = (P + P'K^m + P''K^n + \ldots.)\,dx$; da nun $dX = P\,dx$, so ist $dK = (P'K^m + P''K^n + \ldots.)\,dx$; setzen wir statt K wieder seinen Werth, so ist

$$h\,dV' + h^{\alpha}\,dV'' + \ldots. = P'h^m\,dx\,(V' + V''h^{\alpha-1} + \ldots.)^m + P''h^n\,dx\,(V' + V''h^{\alpha-1} + \ldots.)^n + \ldots\ldots\ldots$$

Es sind hier P', P'', u. s. w., so wie m, n, u. s. w., als bekannt anzusehen, weil der Differentialquotient p, mithin auch seine Entwickelung, indem man in denselben $X+K$ statt x setzt, bekannt ist; dagegen V', V'', u. s. w, so wie auch α, u. s. w., sind unbekannt, weil das vollständige Integral nach Annahme nicht bekannt ist. Diese letzteren Größen können wir jedoch bestimmen, indem wir bemerken, daß die so eben gefundene Gleichung wahr seyn muß, welches auch der Werth von C, daher auch von h ist; nachdem wir also die in dem zweiten Gliede der Gleichung angedeuteten Potenzerhebungen vorgenommen haben, so müssen von der niedrigsten Potenz von h an je zwei Theilsätze der beiden Glieder in Übereinstimmung gebracht werden können. Der die niedrigste Potenz von h enthaltende Theilsatz in dem ersten Gliede ist $h\,dV'$; der die niedrigste Potenz von h enthaltende Theilsatz des zweiten Gliedes ist $h^m P' V'^m\,dx$; es muß also $h\,dV' = h^m P' V'^m\,dx$ seyn.

Diese Gleichsetzung kann nur dann stattfinden, wenn $m = 1$; in diesem Falle ist $dV' = P'V'\,dx$, $\frac{dV'}{V'} = P'\,dx$, $\log. V' = \int P'dx$, $V' = e^{\int P'dx}$; die Gleichsetzung der folgenden Theilsätze der beiden Glieder findet auf dieselbe Weise statt.

Wenn $m > 1$, so können wir nicht die ersten Theilsätze der beiden Glieder gleich setzen; wenn wir jedoch jetzt $V' = 1$ setzen, so ist $dV' = o$, der erste Theilsatz des ersten Gliedes verschwindet also; indem wir nun den zweiten Theilsatz dieses Gliedes gleich setzen dem ersten Theilsatze

des zweiten Gliedes, so ist $h^\alpha dV'' = h^m P' dx$; es ist also $\alpha = m$, und $dV'' = P' dx$, folglich $V'' = \int P' dx$; die Vergleichung der folgenden Theilsätze der beiden Glieder erfolgt auf dieselbe Weise.

Wenn aber $m < 1$, so können wir den ersten Theilsatz $h^m P' V'^m dx$ des zweiten Gliedes gleich setzen weder dem ersten Theilsatze $h dV'$, noch dem zweiten Theilsatze $h^\alpha dV''$ des ersten Gliedes, weil $\alpha > 1$; wir können also in diesem Falle das vollständige Integral V nicht auf eine solche Weise entwickeln, daß, wenn wir in der Entwickelung $h = o$, d. i., $C = C'$ setzen, es sich in X verwandelt; es ist also in diesem Falle $y = X$ eine besondere Auflösung.

§. 181.

Wir erkennen also, ob eine Gleichung $y = X$, welche einer gegebenen Differentialgleichung $dy = p dx$ Genüge leistet, ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung ist, indem wir $X + K$ statt X in p setzen, und die Entwickelung nach den aufsteigenden Potenzen von K unter der Gestalt $P + P' K^m + \ldots$ ordnen; es wird dann $y = X$ ein besonderes Integral seyn, wenn $m = 1$ oder > 1, dagegen wird $y = X$ eine besondere Auflösung seyn, wenn $m < 1$.

Nun haben wir aber §. 53. und 54. gesehen, daß, wenn wir die Funktion p von y entwickeln, indem wir statt $y = X$ hinschreiben $y = X + K$, und wenn in dieser Entwickelung der niedrigste Exponent von $K < 1$, der Differentialquotient $\frac{dp}{dy}$ unendlich groß ist.

Um also zu sehen, ob eine Differentialgleichung einer besonderen Auflösung fähig ist, so setzen wir in derselben $dy = p dx$, und schaffen dx durch Division weg; wir ziehen sodann aus derselben den Differentialquotienten $\frac{dp}{dy}$, welchen wir durch $\frac{M}{N}$ vorstellen wollen; wenn jetzt ein Fak-

tor von N, welcher nicht zugleich Faktor in M ist, = o gesetzt werden kann, so wird dadurch $\frac{dp}{dy}$ unendlich groß; dieser Faktor, = o gesetzt, ist also eine besondere Auflösung, vorausgesetzt nämlich, daß er der ursprünglichen Differentialgleichung Genüge leistet.

Der Fall, in welchem die besondere Auflösung unter der Gestalt x = einer beständigen Größe erscheint, scheint diesem Verfahren zu entgehen; allein, wenn wir in der Differentialgleichung x mit y, also auch dx mit dy verwechseln, so wird das Verfahren auch auf diesen Fall anwendbar.

Wenn die Gleichung eine algebraische in Bezug auf x und y ist, so nehmen wir die Untersuchung am einfachsten auf folgende Weise vor. Schaffen wir sämmtliche Wurzelgrößen und Nenner weg, so erscheint das Differential der Differentialgleichung, nachdem wir $dy = p\,dx$ gesetzt haben, unter der Gestalt: $L\,dx + M\,dy + N\,dp = o$; L, M und N werden ganze und rationale Funktionen von x, y und p seyn; dividiren wir durch dy, und bemerken wir, daß $dx = \frac{dy}{p}$, so ist $\frac{dp}{dy} = -\left(\frac{L}{p} + M\right) : N$; wenn also ein Faktor von N, = o gesetzt, der Differentialgleichung Genüge leistet, so ist derselbe eine besondere Auflösung.

Da nun das Differential sich in N dp verwandelt, wenn wir dx = o, und dy = o setzen, so erhalten wir dieses N, indem wir die Differentialgleichung nur nach p differentiiren. Wenn in diesem Faktor, = o gesetzt, p vorkömmt, so eliminiren wir zwischen dieser und der Differentialgleichung p, und erhalten so eine Gleichung zwischen x und y.

§. 182.

Wenden wir dieses Verfahren auf einige Beispiele an. Es sey die Differentialgleichung $dy - dx - dx\sqrt{y^2 - x^2} = o$, welcher durch y = x, d. i. durch y − x = o, Genüge geleistet wird. Um nun zu sehen, ob dieses ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung ist, so setzen wir

$dy = p\,dx$, woraus $p - 1 = \sqrt{y^2 - x^2}$; $(p-1)^2 - (y^2 - x^2) = o$ folgt; das Differential dieser Gleichung nach p ist $2(p-1)\,dp$; setzen wir $N = 2(p-1) = o$, so ist $p = 1$, welcher Werth, in die vorige Gleichung gesetzt, $y^2 - x^2 = o$, also sowohl $y - x = o$, als $y + x = o$ gibt. Die Gleichung $y - x = o$ leistet der Differentialgleichung Genüge, sie ist also eine besondere Auflösung; dagegen die Gleichung $y + x = o$ leistet ihr nicht Genüge.

Es sey die Differentialgleichung

$y\,dy + x\,dx = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,.\,dx$, welcher $x^2 + y^2 - a^2 = o$ Genüge leistet.

Um nun zu sehen, ob dieses ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung ist, so setzen wir $dy = p\,dx$, und erhalten so

$$yp + x = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$
$$(yp + x)^2 = x^2 + y^2 - a^2,$$
$$(yp + x)^2 - (x^2 + y^2 - a^2) = o.$$

Das Differential dieser Gleichung nach p ist $2(yp + x)\,dp$; setzen wir nun $2(yp + x) = o$, so folgt daraus $yp + x = o$, $p = -\frac{y}{x}$; setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung, so ist $x^2 + y^2 - a^2 = o$; es ist also dieses eine besondere Auflösung der Differentialgleichung.

Wir leisten der Differentialgleichung $(x^3 - a^3)\,dy = (y^3 - a^3)\,dx$ durch $y = x$, d. h. durch $y - x = o$, Genüge. Um nun zu sehen, ob diese Gleichung ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung ist, so setzen wir $dy = p\,dx$, woraus $(x^3 - a^3)\,p = y^3 - a^3$, $(x^3 - a^3)\,p - (y^3 - a^3) = o$ folgt.

Das Differential dieser Gleichung nach p ist $(x^3 - a^3)\,dp$; setzen wir $N = x^3 - a^3 = o$, so folgt hieraus, daß der einzige reelle Faktor von N, $x - a = o$, welche Gleichung der Differentialgleichung nicht identisch Genüge leistet, also auch keine besondere Auflösung derselben ist.

Da nun $y - x$ nicht als Faktor in N enthalten ist, so ist $y - x = o$ ein besonderes Integral der Differentialgleichung.

Integration der Differentialgleichungen von höheren Ordnungen zwischen zwei veränderlichen Größen.

§. 183.

Eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung können wir immer betrachten als das Resultat der Elimination einer Constante C zwischen einer ursprünglichen Gleichung $U = o$ und ihrem unmittelbaren Differentialen $dU = o$.

Eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung können wir ansehen als das Resultat der Elimination zweier Constanten C und C′ zwischen der ursprünglichen Gleichung $U = o$, und ihren beiden ersten unmittelbaren Differentialen $dU = o$, und $d^2U = o$. Es sey $V = o$ das Resultat der Elimination von C, und $V' = o$ das Resultat der Elimination von C′ zwischen $U = o$ und $dU = o$, so ist klar, daß sowohl $V = o$ als auch $V' = o$ als das erste Integral der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung zu betrachten ist; denn dieselbe entsteht, sowohl indem wir C′ zwischen $V = o$ und $dV = o$, als auch, indem wir C′ zwischen $V' = o$ und $dV' = o$ eliminiren; eine jede Differentialgleichung von der zweiten Ordnung hat also zwei erste Integrale, wovon das erste eine Constante C, das zweite eine Constante C′ enthält. Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, so erhalten wir die Gleichung $U = o$, welche das zweite Integral der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist, und welche die beiden Constanten C und C′ enthält.

Es sey, z. B, die Gleichung $U = y^2 - 2nx - mx^2 = o$, in welcher die beiden Constanten m und n vorkommen. Es ist hier $dU = 2y\,dy - 2n\,dx - 2m\,x\,dx = o$; setzen wir aus dieser Gleichung $n = \frac{y\,dy - mx\,dx}{dx}$ in U, so ist $V = y^2\,dx - 2xy\,dy + mx^2\,dx = o$; es ist also

$dV = -2xy\,d^2y - 2x\,dy^2 + 2mx\,dx^2 = o$, daher $m = \frac{dy^2 + y\,d^2y}{dx^2}$; setzen wir diesen Werth in V, so erhalten wir die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung $y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + yx^2\,d^2y + x^2\,dy^2 = o$.

Setzen wir jetzt $m = \frac{y\,dy - n\,dx}{x\,dx}$ aus $dU = o$ in $U = o$, so ist $V' = y^2\,dx - nx\,dx - xy\,dy = o$, daher $dV' = y\,dy\,dx - n\,dx^2 - x\,y\,d^2y - x\,dy^2 = o$, folglich $n = \frac{y\,dy\,dx - x\,y\,d^2y - x\,dy^2}{dx^2}$; setzen wir diesen Werth in $V' = o$, so erhalten wir die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung
$y^2\,dx^2 - 2xy\,dy\,dx + yx^2\,d^2y + x^2\,dy^2 = o$, welche mit der durch die Elimination von m zwischen $V = o$ und $dV = o$ gefundenen übereinstimmt.

Die zwei ersten Integrale dieser Differentialgleichung sind also $V = o$ und $V' = o$; aus $V = o$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + mx^2}{2xy}$; aus $V' = o$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - nx}{xy}$; wir erhalten also die Gleichung $\frac{y^2 + mx^2}{2xy} = \frac{y^2 - nx}{xy}$,
$y^2 - 2nx - mx^2 = o$, welche mit der ursprünglichen Gleichung $U = o$ übereinstimmt, und das zweite Integral der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist.

Eine jede Differentialgleichung von der dritten Ordnung können wir als das Resultat der Elimination dreier Constanten C, C′, C″ zwischen einer ursprünglichen Gleichung $U = o$, und ihren drei ersten unmittelbaren Differentialen $dU = o$, $d^2U = o$, $d^3U = o$ ansehen.

Zwischen den drei ersten dieser Gleichungen können wir nach und nach zwei der drei Constanten eliminiren; wir erhalten so drei Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung, wovon eine jede das erste Integral der Differentialgleichung von der dritten Ordnung ist, und eine Constante enthält. Eben so können wir zwischen den beiden Gleichun-

gen $U = o$ und $dU = o$ nach und nach eine der drei Constanten eliminiren; wir erhalten so drei Differentialgleichungen von der ersten Ordnung, wovon eine jede zwei Constanten enthält, und das zweite Integral der Differentialgleichung von der dritten Ordnung ist; das dritte Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung $U = o$, welche die drei Constanten C, C′, C″ enthält.

Eben so zeigen wir im allgemeinen nach, daß eine jede Differentialgleichung von der n ten Ordnung n erste Integrale hat, wovon eine jede eine Differentialgleichung von der (n—1) ten Ordnung ist, und eine verschiedene Constante enthält. Wenn wir zwischen diesen n Gleichungen die n—1 Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ eliminiren, so erhalten wir die ursprüngliche Gleichung, welche n Constanten enthält, und das n te Integral dieser Differentialgleichung von der n ten Ordnung ist.

§. 184.

Wenn ein höherer Differentialquotient von y direkt durch eine Funktion von x allein ausgedrückt ist, so kann die entsprechende ursprüngliche Gleichung durch wiederholte Integrationen gefunden werden.

Es sey im allgemeinen $\frac{d^ny}{dx^n} = X$, und dx beständig gesetzt worden. Es ist $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{dx} d \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; die vorige Gleichung ist also gleichbedeutend mit $d \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = X dx$; es ist also $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int X dx + C$; eben so finden wir sodann $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int (\int X dx + C)\, dx + C'$,

$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int [\int (\int X dx + C)\, dx + C']\, dx + C''$, u. s. w.

Es sey, z. B., $\frac{d^2y}{dx^2} = ax + b$, so ist

$\frac{dy}{dx} = \int (ax + b)\, dx + C = \frac{ax^2}{2} + bx + C$, und

$y = \int \left(\frac{ax^2}{2} + bx + C\right) dx + C' = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + Cx + C'$.

Es sey $\frac{d^3y}{dx^3} = \cos. x$, so ist

$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \cos. x\, dx + C = \sin. x + C$, $\frac{dy}{dx} = \int (\sin. x + C) dx + C'$

$= -\cos. x + Cx + C'$, und $y = \int (-\cos. x + Cx + C') dx + C''$

$= -\sin. x + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''$.

Es sey $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$, so ist $\frac{dy}{dx} = a \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$+ C = a \text{ arc. sin. } x + C$, $y = \int (a \text{ . arc. sin. } x + C) dx + C'$

$= (\S. 149.)\ ax \text{ arc. sin. } x + a\sqrt{1-x^2} + Cx + C'$.

§. 185.

Wir gehen nun vorerst zu der Integration der Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung über. Um die Schwierigkeiten der Integration nicht zu vermehren, so nehmen wir an, daß in denselben keine höheren Potenzen der zweiten Differentialen vorkommen.

Die allgemeinste Gestalt, unter welcher eine solche Gleichung erscheinen kann, ist $G\, d^2y + H\, d^2x + I\, dx^2 = o$, in welcher Gleichung G, H, I Funktionen von x, y, dx, dy und beständigen Größen vorstellen.

Wenn dx beständig gesetzt wurde, so ist $d^2x = o$, der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = p$, und der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$; setzen wir diese Werthe in die Differentialgleichung, so werden in derselben die Differentialen verschwinden, und es werden nur die allgemeinen

Ausdrücke p und q der beiden ersten Differentialquotienten vorkommen.

Wenn nicht dx, sondern das Differential dt einer Funktion von x und y konstant gesetzt wurde, so ziehen wir die Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2x}{dx^2}$ aus den beiden Gleichungen

$$q = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{d^2y - p\,d^2x}{dx^2}$$

und $d^2t = o$; nachdem wir diese Werthe in die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung gesetzt haben, so kommen in derselben nur noch die allgemein vorgestellten Differentialquotienten p und q vor.

Eine unter diese Gestalt gebrachte Differentialgleichung von der zweiten Ordnung werden wir die reduzirte Gleichung nennen.

Wenn, z. B., in der Differentialgleichung
$d^2y + A\,dx\,dy + B\,d^2x + C\,dx^2 + D\,dy^2 = o$, welche gleichbedeutend ist mit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\,\frac{dy}{dx} + B\,\frac{d^2x}{dx^2} + C + D\,\frac{dy^2}{dx^2} = o,$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ beständig gesetzt wurde, so ist $d\,(ds^2)$ $= d\,(dx^2 + dy^2) = 2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y = o$, folglich

$d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx} = -p\,d^2y$; setzen wir diesen Werth in $q = \frac{d^2y - p\,d^2x}{dx^2}$, so erhalten wir $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{1+p^2}$,

$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{pq}{1+p^2}$; substituiren wir diese Werthe, und außerdem noch $\frac{dy}{dx} = p$ in die obige Differentialgleichung, so erhalten wir die reduzirte Gleichung derselben

$$q + Ap(1+p^2) - Bqp + C(1+p^2) + Dp^2(1+p^2) = o.$$

§. 186.

Wenn in der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung die veränderlichen Größen x und y selbst nicht vorkommen, so können wir dieselbe immer unter die Gestalt bringen $q = P$, welches P eine Funktion von p allein vorstellt.

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $\frac{dp}{dx} = P$, es ist also $dx = \frac{dp}{P}$, daher $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{P}$, folglich $x = \int\frac{dp}{P} + C$, und $y = \int\frac{p\,dp}{P} + C'$; nach erfolgter Integration erhalten wir die endliche Gleichung zwischen x und y, indem wir p zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $d^2y = A\,dy\,dx + B\,dy^2$, deren reduzirte Gleichung $q = Ap + Bp^2$ ist, unter der Voraussetzung, daß dx beständig ist. Es ist gegenwärtig $P = Ap + Bp^2$, daher $dx = \frac{dp}{Ap + Bp^2} = \frac{1}{A}\left(\frac{dp}{p} - \frac{B\,dp}{A+Bp}\right)$, und $dy = \frac{dp}{A+Bp} = \frac{1}{B}\frac{B\,dp}{A+Bp}$; es ist also $C + x = \frac{1}{A}\,[\log.\ p - \log.\ (A + Bp)] = \frac{1}{A}\log.\frac{p}{A+Bp}$, und $C' + y = \frac{1}{B}\log.\,(A + Bp)$; das Resultat der Elimination von p zwischen diesen beiden Gleichungen wird die gesuchte endliche Gleichung zwischen x und y seyn.

Es sey die Differentialgleichung $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-\,dx\,d^2y} = a$, und dx konstant, welche Gleichung, geometrisch betrachtet, einer die Eigenschaft besitzenden krummen Linie angehört, daß ihr Krümmungshalbmesser konstant und $= a$ ist.

Dividiren wir den Zähler und den Nenner ihres ersten Gliedes durch dx^3, so erhalten wir die reduzirte Gleichung

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-q} = a,\ q = -\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{daher}$$

$$dx = -\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{und}\ dy = -\frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{folglich}$$

$$x = C - a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = (\S.\ 126, 3)\ C - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\text{und}\ y = C' - a\int\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = (\S.\ 126., 1)\ C' - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

bringen wir C und C′ in die ersten Glieder, und quadriren wir, so ist $(x-C)^2 = \frac{a^2p^2}{1+p^2}$, $(y-C')^2 = \frac{a^2}{1+p^2}$; addiren wir diese beiden Gleichungen, so ist $(x-C)^2 + (y-C')^2 = a^2$; die krumme Linie, welche die vorhin bemerkte Eigenschaft besitzt, ist also ein Kreis, dessen Halbmesser $= a$.

§. 187.

Wenn in der Differentialgleichung nur die eine veränderliche Größe x, und nicht y vorkömmt, so enthält die reduzirte Gleichung, weil $\frac{dp}{dx} = q$, nur die zwei veränderlichen Größen p und x, in Bezug auf welche sie von der ersten Ordnung ist; durch die Integration derselben erhalten wir also eine endliche Gleichung zwischen p und x, welche eine willkürliche Constante enthalten wird. Aus dieser Gleichung ziehen wir $p =$ einer Funktion von $x = X$, daher $dy = X\,dx$, $y = \int X\,dx + C'$. Wenn es einfacher ist, diese Gleichung nach x aufzulösen, wenn wir also den Werth von $x =$ einer Funktion von $p = P$ nehmen, so bemerken wir, daß aus $dy = p\,dx$ folgt $y = \int p\,dx = px - \int x\,dp = pP - \int P\,dp$; nach erfolgter Integration erhalten wir die end-

liche Gleichung zwischen x und y, indem wir p zwischen jener und $x = P$ elimininiren.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $d^2y + X\,dy\,dx = X'\,dx^2$, und dx beständig. Setzen wir $dy = p\,dx$, und $d^2y = q\,dx^2 = dp\,dx$, so verwandelt sich diese Gleichung in $dp + Xp\,dx = X'\,dx$, deren Integral nach §. 162. ist $p = e^{-\int X\,dx}\,(C + \int e^{\int X dx}\,X'\,dx) = \frac{dy}{dx}$; es ist also $y = \int e^{-\int X\,dx}\,(C + \int e^{\int X dx}\,X'\,dx)\,dx + C'$.

Wenn $X = \frac{1}{x}$, und $X' = x^n$, so ist $\int X\,dx = \log. x$, $e^{\int X dx} = x$, $e^{-\int X dx} = \frac{1}{x}$, daher $p = \frac{1}{x}\left(C + \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{C}{x} + \frac{x^{n+1}}{n+2}$, folglich $y = C\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{n+2}\int x^{n+1}dx + C'$ $= C\,\log. x + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + C'$.

Es sey die Differentialgleichung

$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y} = \frac{x^2}{a}$, und dx beständig. Diese Gleichung verwandelt sich nach den gehörigen Substitutionen in $-\frac{a\,dx}{x^2} = dp\,(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}$; es ist also $\frac{a}{x} = C + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{C\sqrt{1+p^2} + p}{\sqrt{1+p^2}}$, daher $x = \frac{a\sqrt{1+p^2}}{C\sqrt{1+p^2} + p}$, folglich $y = px - \int x\,dp = px - a\int\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{C\sqrt{1+p^2} + p}$; das Integral des summatorischen Theils bestimmen wir nach §. 121.

§. 188.

Wenn in der Differentialgleichung nur die veränderliche Größe y, und nicht x vorkömmt, so enthält die reduzirte Gleichung, weil $dx = \frac{dy}{p}$, und $q = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$, nur die beiden veränderlichen Größen p und y; durch die Integration dieser Gleichung erhalten wir also eine endliche Glei-

chung zwischen p und y, welche eine willkürliche Constante enthalten wird. Wenn wir aus dieser Gleichung p durch eine Funktion Y von y ausdrücken, so ist $\frac{dy}{dx} = Y$, daher $dx = \frac{dy}{Y}$, $x = \int \frac{dy}{Y} + C'$. Wenn es aber bequemer ist, y durch eine Funktion P von p auszudrücken, so ist

$$x = \int \frac{dy}{p} + C' = \frac{y}{P} + \int \frac{y\,dp}{P^2} + C' = \frac{y}{P} + \int \frac{P\,dp}{P^2} + C';$$

durch die Elimination von p zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $y = P$ erhalten wir sodann die endliche Gleichung zwischen x und y.

Es sey, z. B., $\frac{d^2y}{dx^2}$ = einer Funktion von $y = fy$, und dx beständig, so ist $\frac{p\,dp}{dy} = fy$, $p\,dp = fy \,.\, dy$,

$\frac{p^2}{2} = \int fy \,.\, dy + C$, $p = \sqrt{2(\int fy \,.\, dy + C)} = \frac{dy}{dx}$, daher

$dx = \frac{dy}{\sqrt{2(\int fy.dy+C)}}$, folglich $x = C' + \int \frac{dy}{\sqrt{2(\int fy.dy+C)}}$.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = ay$, so ist $fy = ay$, $\int fy \,.\, dy = \frac{ay^2}{2}$, daher, indem wir $2C = c$ setzen, $x = C' + \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c}}$

$= (\S.\ 121.)\ C' + \frac{1}{\sqrt{a}} \log.\ (y + \sqrt{ay^2+c})$, wenn nämlich a positiv ist, indem wir $\log. 2\sqrt{a}$ in die Constante C′ einrechnen.

Es sey die Differentialgleichung $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y} = \sqrt{2ay}$, und dx beständig. Dividiren wir den Zähler und den Nenner ihres ersten Gliedes durch dx^3, setzen wir p statt $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{p\,dp}{dy}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} : -\frac{p\,dp}{dy} = \sqrt{2ay}$, $\frac{-p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\sqrt{2ay}}$, woraus nach erfolgter Integration $(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} + c = \sqrt{\frac{2y}{a}}$, daher $y = \frac{a}{2}\left[(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} + c\right]^2 = \frac{a}{2(1+p^2)} + \frac{ac}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{ac^2}{2}$ folgt, indem wir durch c die willkürliche Constante vorstellen; es ist also $x = \frac{y}{p} + \int\frac{y\,dp}{p^2} + c' = \frac{y}{p} + \frac{a}{2}\int\frac{dp}{p^2(1+p^2)} + ac\int\frac{dp}{p^2\sqrt{1+p^2}} + \frac{ac^2}{2}\int\frac{dp}{p^2}$. Die in dem zweiten Gliede vorkommenden Integrale bestimmen wir nach §. 115. und 123.

§. 189.

Wenn in der Differentialgleichung die beiden veränderlichen Größen x und y zugleich vorkommen, so ist die Integration derselben unter einer endlichen Gestalt nur in einigen wenigen speziellen Fällen möglich. Gegenwärtig müssen wir uns bestreben, vermittelst einer schicklichen Substitution statt $p, q = \frac{dp}{dx}$, x und y die reduzirte Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von der ersten Ordnung ist, und nur zwei veränderliche Größen und ihre ersten Differentialen enthält.

Betrachten wir vorerst die Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung, welche in Bezug auf x, y, dx, dy und d^2y homogen sind, wenn man eine jede dieser Größen als eine eigene veränderliche Größe betrachtet. Es ist dann y von der Dimension 1, der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ von der Dimension 0, und der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ von der Dimension -1; wenn wir also $y = ux$,

$\frac{dy}{dx} = p$, $q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{x}$ substituiren, so wird in sämmtlichen Theilsätzen der Gleichung dieselbe Potenz von x Faktor seyn; nachdem wir also durch dieselbe dividirt haben, so erhalten wir eine Gleichung zwischen u, p und v.

Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen, so ist $dy = p\,dx = u\,dx + x\,du$, daher $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$; aus der dritten dieser Gleichungen folgt $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{v}{x}$, daher $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{v}$; es ist also $\frac{dp}{v} = \frac{du}{p-u}$, folglich

$v = \frac{dp}{du}(p - u)$; setzen wir diesen Werth in die Gleichung zwischen u, p und v, so erhalten wir eine Gleichung zwischen u, p und ihren ersten Differentialen, und durch die Integration dieser Gleichung eine endliche Gleichung zwischen p und u; ziehen wir aus dieser Gleichung den Werth von p, und setzen wir denselben in $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, so folgt hieraus $\log. x + \text{const.} = \int \frac{du}{p-u}$; nach erfolgter Integration setzen wir statt u seinen Werth $\frac{y}{x}$, und erhalten so die endliche Gleichung zwischen x und y.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $nx^3\,d^2y = (x\,dy - y\,dx)^2$, welche gleichbedeutend ist mit

$$nx^3\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\,\frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Nach den vorhin angedeuteten Substitutionen, und nachdem die Division durch x^2 vollzogen ist, verwandelt sich diese Gleichung in $nv = (p-u)^2$, $v = \frac{(p-u)^2}{n} =$ dem allgemeinen Werthe von $v = \frac{dp}{du}(p-u)$, daher

$n\,dp = (p-u)\,du$; setzen wir $p-u=t$, so ist $dp = dt+du$, daher $n\,dt + n\,du = t\,du$, $du = \frac{n\,dt}{t-n}$, also

$u = n \log.(t-n) + n \log. c = n \log.[t(t-n)]$, indem wir die willkürliche Constante durch $n \log. c$ vorstellen. Es ist $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{n\,dt}{t(t-n)} = \frac{dt}{t-n} - \frac{dt}{t}$, daher

$\log. x. = \log.(t-n) - \log. t + \log. c' = \log. \frac{c'(t-n)}{t}$, indem wir die willkürliche Constante durch $\log. c'$ vorstellen; es ist also $x = \frac{c'(t-n)}{t}$, daher $t = \frac{c'n}{c'-x}$, folglich

$t - n = \frac{nx}{c'-x}$; setzen wir diesen Werth in den vorhin gefundenen Werth von $u = \frac{y}{x}$, so erhalten wir das gesuchte Integral $\frac{y}{x} = n \log. \frac{cnx}{c'-x}$; es ist also

$y = nx \log. \frac{cnx}{c'-x}$.

§. 190.

Über die Art der vorzunehmenden Substitution lassen sich keine sehr allgemeinen Regeln aufstellen wegen der großen Verschiedenheit der möglichen Fälle.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, und dx beständig. Die reduzirte Gleichung ist $yq - p^2 = \frac{y^2\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. Es ist leicht einzusehen, daß, wenn wir $q = uy$, und $p = vy$ setzen, y verschwinden wird, nachdem wir die Gleichung durch y^2 dividirt haben; sie verwandelt sich dadurch in

$u - v^2 = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. Differentiiren wir die Gleichung $y = vy$, so ist $dp = q\,dx = v\,dy + y\,dv = vp\,dx + y\,dv$;

setzen wir statt q und p ihre Werthe, so ist $uydx = v^2 y\,dx + y\,dv$, daher $u = v^2 + \frac{dv}{dx}$; setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung, so verwandelt sie sich in

$v^2 + \frac{dv}{dx} - v^2 = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$; es ist also $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

daher $v = c + \sqrt{x^2-a^2}$; es ist also $\frac{dy}{dx} = p = vy$

$= y\,(c + \sqrt{x^2-a^2})$, folglich $\frac{dy}{y} = (c + \sqrt{x^2-a^2})\,dx$,

daher $\log. y = cx + \int dx\,\sqrt{x^2-a^2} + c' =$ (§. 123.)

$cx + \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log.(x + \sqrt{a^2-x^2}) + c'$.

§. 191.

Wenn eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung in Bezug auf die eine der veränderlichen Größen und ihre Differentialen homogen ist, so ist es vortheilhaft, statt dieser veränderlichen Größen zu substituiren e^u, weil $d \cdot e^u = e^u\,du$, $d^2 \cdot e^u = d(e^u\,du) = e^u\,(du^2 + d^2u)$; nach erfolgter Substitution kann also die Differentialgleichung durch Division von der Exponentialgröße befreit werden.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung $d^2y + Py\,dx + Qy\,dx^2 = o$, in welcher P und Q Funktionen von x und bekannten Größen sind, und dx beständig ist. Um das Vorkommen des zweiten Differentials der in dem substituirten Ausdrucke enthaltenen veränderlichen Größe zu vermeiden, so substituiren wir $y = e^{\int t\,dx}$; es ist dann $dy = e^{\int t\,dx}\,t\,dx$, und $d^2y = e^{\int t\,dx}\,(t^2\,dx^2 + dt\,dx)$; nachdem wir also durch $e^{\int t\,dx}$ dividirt haben, verwandelt sich die Differentialgleichung in eine andere von der ersten Ordnung $t^2\,dx + dt + Pt\,dx + Q\,dx = o$, welche freilich nur in einigen speziellen Fällen unter einer endlichen Gestalt integrirbar seyn wird.

Wenn P beständig ist, und $= A$, und Q beständig ist, und $= B$, so wird diese Gleichung

$t^2\,dx + dt + At\,dx + B\,dx = o$, es ist also dann $dx = -\frac{dt}{t^2+At+B}$, daher $x = c - \int \frac{dt}{t^2+At+B}$; aus $y = e^{\int t\,dx}$ folgt ferner log. $y = c' + \int t\,dx = c' + \int \frac{t\,dt}{t^2+At+B}$; diese beiden Integrale bestimmen wir nach §. 113. und 114.

Es sey die Differentialgleichung $d^2y + \frac{A\,dy\,dx}{x} + \frac{By\,dx^2}{x^2} = o$, also $P = \frac{A}{x}$, und $Q = \frac{B}{x^2}$. Durch die Substitution $y = e^{\int t\,dx}$ erhalten wir die Differentialgleichung von der ersten Ordnung

$$dt + t^2\,dx + \frac{At\,dx}{x} + \frac{B\,dx}{x^2} = o.$$

In dieser Gleichung gelangen wir zur Sonderung der veränderlichen Größen vermittelst der Substitution $t = \frac{1}{xv}$, woraus $dt = -\frac{x\,dv + v\,dx}{x^2v^2}$ folgt; es ist dann

$$-\frac{x\,dv + v\,dx}{x^2v^2} + \frac{dx}{x^2v^2} + \frac{A\,dx}{x^2v} + \frac{B\,dx}{x^2} = o,$$

$x\,dv = [Bv^2 + (A-1)\,v + 1]\,dx$, daher

$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{Bv^2 + (A-1)\,v + 1}$, folglich

log. $x = c + \int \frac{dv}{Bv^2 + (A-1)\,v + 1}$, also

log. $y = c' + \int t\,dx = c' + \int \frac{dx}{xv}$

$= c' + \int \frac{dv}{v\,[Bv^2 + (A-1)\,v + 1]}$.

§. 192.

Von den höheren Differentialgleichungen haben wir schon §. 184. den Fall betrachtet, wenn $\frac{d^ny}{dx^n} =$ einer Funktion

von x allein $= X$; betrachten wir nun die allgemeinere Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = Q$, in welcher dx beständig angenommen ist, und P und Q Funktionen von x und $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ vorstellen.

Setzen wir $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u$, so ist $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{du}{dx}$, unsere Differentialgleichung verwandelt sich also in $\frac{du}{dx} + Pu = Q$, welche in Bezug auf x und u von der ersten Ordnung ist. Wenn wir aus der Integralgleichung derselben $u = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = X$ ziehen, welche Funktion von x eine willkürliche Constante enthalten wird, so gelangen wir sodann (§. 184.) durch fortgesetzte Integrationen zu der ursprünglichen Gleichung zwischen x und y.

Wenn sich jedoch dieser Werth von u nicht mit Leichtigkeit gesondert darstellen läßt, so setzen wir den Differentialquotienten $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = v$, also $u = \frac{dv}{dx}$; indem wir diese Werthe in die vorhin erhaltene Integralgleichung setzen, so verwandelt sich dieselbe in eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung in Bezug auf x und v.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} = \left(a\frac{d^2 y}{dx^2} + 1\right)^2.$$

Setzen wir $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, so ist $x^2 \frac{dq}{dx} = (aq+1)^2$, daher $\frac{dq}{(aq+1)^2} = \frac{dx}{x^2}$, folglich $-\frac{1}{a(aq+1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{c}$ $= -\frac{c+x}{cx}$, indem wir die willkürliche Constante durch $-\frac{1}{c}$ vorstellen; es ist also $a(aq+1) = \frac{cx}{c+x}$,

$a^2 q = \frac{cx}{c+x} - a = c - a - \frac{c^2}{c+x}$; es ist aber

$q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$, daher $dp = \frac{(c-a)dx}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{dx}{c+x}$,

folglich, indem wir durch c' die willkürliche Constante vorstellen, $p = \frac{dy}{dx} = c' + \frac{(c-a)x}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \log.(c+x)$,

$dy = \frac{(c-a)xdx}{a^2} + c'dx - \frac{c^2}{a^2} dx \log.(x+c)$; da nun $\int dx \log.(x+c) = \int dz \log. z$, wenn wir $x+c=z$ setzen, so ist nach §. 136. $\int dx \log.(x+c) = (x+c)\log.(x+c) - x - c$, daher die gesuchte endliche Gleichung zwischen x und y

$y = \frac{(c-a)x^2}{2a^2} + c'x - \frac{c^2}{a^2}(x+c)\log.(x+c) + \frac{c^2 x}{a^2} + c''$,

indem wir das beständige $\frac{c^3}{a^2}$ in die willkürliche Constante einrechnen.

§. 193.

Wenn eine Differentialgleichung, unter der Voraussetzung, daß dx beständig ist, unter der Gestalt erscheint $\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = o$, so verwandelt sich dieselbe, indem wir $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = v$ setzen, woraus

$\frac{du}{dx} = v$, daher $dx = \frac{du}{v}$, und $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dv}{dx} = \frac{vdv}{du}$ folgt, in $\frac{vdv}{du} + Pv + Qu = o$; wenn also P und Q nur Funktionen von $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u$, und $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = v$ sind, so ist dieses eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung zwischen u und v. Wenn wir diese Gleichung integriren, und daraus $v = U$ herleiten, welche Funktion von u eine willkürliche Constante enthalten wird, so ist diese Gleichung

gleichbedeutend mit $\frac{du}{dx} = U$; es ist also $dx = \frac{du}{U}$, daher $x = \int \frac{du}{U}$; nehmen wir aus dieser Integralgleichung den Werth von $u =$ einer Funktion von $x = X$, so ist $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = X$; durch fortgesetzte Integrationen finden wir hieraus die endliche Gleichung zwischen x und y.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$$2\frac{dy\,d^3y}{dx^4} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$$

Es ist hier $u = \frac{dy}{dx} = p$, $v = \frac{d^2y}{dx^2} = q$, daher $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{q\,dq}{dp}$ zu setzen, wodurch unsere Gleichung umgewandelt wird in $\frac{2pq\,dq}{dp} + q^2 + \frac{1}{p^2} = 0$, $2pq\,dq + q^2\,dp = -\frac{dp}{p^2}$; das erste Glied dieser Gleichung ist das richtige Differential von pq^2, es ist also $pq^2 = \frac{1}{p} + c = \frac{1+cp}{p}$, daher $q = \frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1+cp}}{p}$, folglich

$dx = \frac{p\,dp}{\sqrt{1+cp}}$, und $dy = p\,dx = \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+cp}}$, daher $x = c' + \int \frac{p\,dp}{\sqrt{1+cp}}$, $y = c'' + \int \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+cp}}$; durch die Integration dieser beiden Gleichungen, welche wir nach §. 120. vollziehen, erhalten wir zwei Gleichungen zwischen x, y und p, welche, zusammen betrachtet, das gesuchte Integral der gegebenen Differentialgleichung sind.

§. 194.

Betrachten wir jetzt die Differentialgleichungen von höheren Ordnungen, welche in Bezug auf y und seine Differentialen dy, d^2y, d^3y, u. s. w., homogen sind, und in

welchen diese Größen nur in der ersten Dimension vorkommen. Diese Art von Gleichungen erscheinen im allgemeinen unter der Gestalt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + U\frac{dy}{dx} + Vy = o,$$ so zwar, daß $P, \ldots U, V$ nur Funktionen von x und bekannten Größen sind.

Diese Differentialgleichungen besitzen die merkwürdige Eigenschaft, daß, wenn $y = X$, $y = X'$, $y = X''$ .... n besondere Integrale dieser Gleichung sind, und wenn C, C', C'' .... willkürliche Constanten vorstellen, das vollständige Integral ist $y = CX + C'X' + C''X'' + \ldots$

Beweisen wir diesen Satz für die Differentialgleichungen von der dritten Ordnung dieser Art, indem der Beweis für Differentialgleichungen von höheren Ordnungen dieser Art derselbe ist.

Es sey also die Differentialgleichung von der dritten Ordnung $\frac{d^3 y}{dx^3} = P\frac{d^2 y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + R = o$; es seyen $y = X$, $y = X'$, $y = X''$ drei besondere Integrale, welche dieser Differentialgleichung Genüge leisten, so behaupte ich, daß $y = CX + C'X' + C''X''$ das vollständige Integral dieser Gleichung ist.

Substituiren wir diesen Werth statt y in die Differentialgleichung, so verwandelt sich ihr erstes Glied in

$$C\left(\frac{d^3X}{dx^3} + P\frac{d^2X}{dx^2} + Q\frac{dX}{dx} + R\right)$$
$$+ C'\left(\frac{d^3X'}{dx^3} + P\frac{d^2X'}{dx^2} + Q\frac{dX'}{dx} + R\right)$$
$$+ C''\left(\frac{d^3X''}{dx^3} + P\frac{d^2X''}{dx^2} + Q\frac{dX''}{dx} + R\right),$$

welche Summe $= o$, weil die Multiplikatoren von C, C' und C'' nach Annahme $= o$ sind; es enthält aber ferner die Gleichung $y = CX + C'X' + C''X''$ drei willkürliche Constanten C, C' C'', sie ist also das vollständige Integral der Differentialgleichung.

§. 195.

Wenn die Coeffizienten der in dem vorigen §. betrachteten Differentialgleichung von der n ten Ordnung alle beständige Größen sind, so können wir nach dem Vorhergehenden ihr Integral auf folgende Weise bestimmen.

Es sey also die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + M\frac{dy}{dx} + Ny = o.$$

Substituiren wir $y = e^{mx}$, welches m eine beständige Größe vorstellt, so ist $\frac{dy}{dx} = m\,e^{mx}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2\,e^{mx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = m^3\,e^{mx}$,

$\ldots\ldots\ldots$, $\frac{d^n y}{dx^n} = m^n\,e^{mx}$; nachdem wir also das Resultat der Substitution durch e^{mx} dividirt haben, so wird dasselbe $m^n + Am^{n-1} + \ldots + Mm + N = o$.

Aus dieser Gleichung von dem n ten Grade ziehen wir n Wurzeln von m; nennen wir dieselben m', m'', m''', u. s. w., so sind $y = e^{m'x}$, $y = e^{m''x}$, $y = e^{m'''x}$, u. s. w., besondere Integrale der Differentialgleichung; aus dem vorigen §. folgt also, daß ihr vollständiges Integral

$$y = Ce^{m'x} + C'e^{m''x} + C''e^{m'''x} + \ldots$$

Es sey, z. B., $n = 2$, also die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + B = o$; m' und m'' werden jetzt durch die Gleichung $m^2 + Am + B = o$ bestimmt, und es ist

$$m' = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},\quad m'' = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

und das Integral der Differentialgleichung $y = Ce^{m'x} + C'e^{m''x}$.

Wenn die beiden Wurzeln m' und m'' imaginär sind, und wenn $m' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, so ist $m'' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$; es ist also dann $y = Ce^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C'e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}$

$= e^{\alpha x}\left(C e^{\beta x\sqrt{-1}} + C' e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right)$; aus §. 102. folgt aber $e^{\beta x\sqrt{-1}} = \cos.\ \beta x + \sin.\ \beta x\ \sqrt{-1}$, $e^{-\beta x\sqrt{-1}} = \cos.\ \beta x - \sin.\ \beta x\ \sqrt{-1}$; es ist also $y = e^{\alpha x}\ [(C+C')\cos.\ \beta x + (C-C')\sqrt{-1}\sin.\ \beta x]$; setzen wir $C + C' = c$, $(C-C')\sqrt{-1} = c'$, welches uns verstattet ist, weil C und C′ unbestimmt sind, so ist $y = e^{\alpha x}\ (c\cos.\ \beta x + c'\ \sin.\ \beta x)$.

Wenn $B = \frac{A^2}{4}$, so ist $\sqrt{A^2-4B} = o$, also $m' = m'' = -\frac{A}{2}$; die Differentialgleichung ist dann $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + \frac{A^2}{4} = o$, und das unter der allgemeinen Form ausgedrückte Integral wird $y = (C+C')\ e^{-\frac{Ax}{2}}$; es ist dieses also nur ein besonderes Integral, weil die Summe $C + C'$ nur eine einzige willkürliche Constante vorstellt.

In diesem Falle bestimmen wir das Integral direkt vermittelst der Substitution $y = e^{\int t\,dx}$, $dy = e^{\int t\,dx}\ t\,dx$, $d^2y = e^{\int t\,dx}\ (dt\,dx + t^2\,dx^2)$, woraus

$$\frac{dt}{dx} = t^2 + At + \frac{A^2}{4} = o;\quad dx = -\frac{dt}{t^2+At+\frac{A^2}{4}}$$

$$= -\frac{dt}{\left(t+\frac{A}{2}\right)^2};\quad x + c = \frac{1}{t+\frac{A}{2}},\ \text{daher}$$

$\frac{A}{2} + t = \frac{1}{x+c}$, folglich $t = \frac{1}{x+c} - \frac{A}{2}$ folgt; es ist also $\int t\,dx = \int\frac{dx}{x+c} - \frac{A}{2}\int dx = \log.\ (x+c) - \frac{A}{2}\,x + \log.\ c'$, indem wir durch $\log.\ c'$ die willkürliche Constante vorstellen; es ist also

$$y = e^{\log.(x+c)+\log.c'-\frac{A}{2}x}$$

$$= e^{\log.(x+c)} \cdot e^{\log.c'} \cdot e^{-\frac{A}{2}x}$$

$$= c' e^{-\frac{A}{2}x} (x+c),$$

weil im allgemeinen $e^{\log. v} = v$.

§. 196.

Nach einem ganz ähnlichen Verfahren bestimmen wir das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A}{ax+b}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{B}{(ax+b)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{M}{(ax+b)^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{Ny}{(ax+b)^n} = 0;$$ setzen wir nämlich

$y = (ax+b)^m$, so ist $\frac{dy}{dx} = am\,(ax+b)^{m-1}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2\, m\,(m-1)\,(ax+b)^{m-2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n\, m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,(ax+b)^{m-n};$$

substituiren wir diese Werthe, so verschwinden aus der Differentialgleichung, nachdem wir durch $(ax+b)^{m-n}$ dividirt haben, die veränderlichen Größen, und wir erhalten zur Bestimmung von m die Gleichung von dem n ten Grade

$a^n m(m-1)\ldots(m-n+1) + Aa^{n-1} m(m-1)\ldots(m-n+2)$
$+ \ldots + Mam + N = 0$; stellen wir die n Wurzeln dieser Gleichung durch m', m'', m''', u. s. w., vor, so ist nach §. 194. das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$y = C(ax+b)^{m'} + C'(ax+b)^{m''} + \ldots.$$

§. 197.

Wenn X', X'', X''', u. s. w., n besondere Integrale der Differentialgleichung von der n ten Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$ sind,

so ist $y = CX + C'X' + C''X'' + \ldots$ das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V;$$

$C, C', C'' \ldots$ sind jedoch gegenwärtig nicht beständige Größen, sondern Funktionen von x, welche wir auf die folgende Weise bestimmen.

Wenden wir dieses Verfahren, größerer Deutlichkeit halber, sogleich auf die Differentialgleichung von der dritten Ordnung $\frac{d^3y}{dx^3} + \int\frac{d^2y}{dx^2} + T\frac{dy}{dx} + Uy = V$, an, deren vollständiges Integral also $y = CX + C'X' + C''X''$ ist, wenn wir durch X, X', X'' drei besondere Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^3y}{dx^3} + \int\frac{d^2y}{dx^2} + T\frac{dy}{dx} + Uy = o$ vorstellen. Es ist

$dy = CdX + C'dX' + C''dX'' + XdC + X'dC' + X''dC'';$

da C, C', C'' noch unbestimmt sind, so können wir $XdC + X'dC' + X''dC'' = o$ setzen; es ist dann

$dy = CdX + C'dX' + C''dX''.$

Es ist jetzt ferner $d^2y =$

$Cd^2X + C'd^2X' + C''d^2X'' + dCdX + dC'dX' + dC''dX'';$

da nur erst eine Gleichung zwischen C, C', C'' besteht, so können wir abermals $dCdX + dC'dX' + dC''dX'' = o$ setzen, woraus $d^2y = Cd^2X + C'd^2X' + C''d^2X''$ folgt; es ist ferner $d^3y = Cd^3X + C'd^3X' + C''d^3X'' + dCd^2X + dC'd^2X' + dC''d^2X''$; substituiren wir diese Werthe in die Differentialgleichung, so ist

$$C\left(\frac{d^3X}{dx^3} + \int\frac{d^2X}{dx^2} + T\frac{dX}{dx} + UX\right)$$

$$+ C'\left(\frac{d^3X'}{dx^3} + \int\frac{d^2X'}{dx^2} + T\frac{dX'}{dx} + UX'\right)$$

$$+ C''\left(\frac{d^3X''}{dx^3} + \int\frac{d^2X''}{dx^2} + T\frac{dX''}{dx} + UX''\right)$$

$$+ \frac{dC}{dx}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dC'}{dx}\frac{d^2X'}{dx^2} + \frac{dC''}{dx}\frac{d^2X''}{dx^2} = V.$$

Es sind aber die Multiplikatoren von C, C′, C″ Null, weil X, X′ und X″ besondere Integrale der entsprechenden Differentialgleichung sind; wir haben also zur Bestimmung von dC, dC′ und dC″ die drei Gleichungen von dem ersten Grade, welche nur dx und Funktionen von x und bekannten Größen enthalten,

$$X\,dC + X'\,dC' + X''\,dC'' = o,$$
$$dX\,dC + dX'\,dC', dX''\,dC'' = o,$$
$$d^2X\,dC + d^2X'\,dC' + d^2X''\,dC'' = V\,dx^3.$$

Nachdem wir hieraus $dC = x'\,dx$, $dC' = x''\,dx$, $dC'' = x'''\,dx$ durch Elimination gefunden haben, welches x', x'', x''' bestimmte Funktionen von x sind, so erhalten wir $C = \int x'\,dx + c$, $C' = \int x''\,dx + c'$, $C'' = \int x'''\,dx + c''$, indem wir durch c, c′, c″ die drei willkürlichen Constanten vorstellen; es ist also

$$y = X(\int x'dx + c) + X'(\int x''dx + c') + X''(\int x'''dx + c'')$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \int\frac{d^2y}{dx^2} + T\frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf die Bestimmung des Integrals der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + B = V$ an.

Es seyen $m' = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{A^2-4B}}{2}$ $m'' = -\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{A^2-4B}}{2}$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$m^2 + Am + B = o$, so ist nach §. 195. $X = e^{m'x}$, $X' = e^{m''x}$; zur Bestimmung von dC und dC′ dienen also jetzt, weil $dX = m'\,e^{m'x}\,dx$, $dX' = m''\,e^{m''x}\,dx$, die beiden Gleichungen

$e^{m'x}\,dC + e^{m''x}\,dC' = o$; $m'e^{m'x}dC + m''e^{m''x}\,dC' = V\,dx$,

es ist also $dC = \frac{e^{-m'x}\,V\,dx}{m'-m''}$, und $dC' = \frac{e^{-m''x}\,V\,dx}{m''-m'}$,

folglich $C = \frac{\int e^{-m'x}\,V\,dx}{m'-m''} + c$; $C' = \frac{\int e^{-m''x}\,V\,dx}{m''-m'} + c'$;

es ist also das vollständige Integral der obigen Differentialgleichung $y = c\,e^{m'x} + c'\,e^{m''x}$

$$+\frac{e^{m'x}\int e^{-m'x}V\,dx - e^{m''x}\int e^{-m''x}V\,dx}{m' - m''}.$$

Wenn $m' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $m'' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, so ist

$$c\,e^{m'x} + c'\,e^{m''x} = e^{\alpha x}\left(c\,e^{\beta x\sqrt{-1}} + c'\,e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right)$$

$$= e_{\alpha x}\,[(c + c')\cos.\beta x + (c - c')\sqrt{-1}\sin.\beta x]$$

$= e^{\alpha x}\,(p\cos.\beta x + q\sin.\beta x)$, indem wir

$c + c' = p$, $(c - c')\sqrt{-1} = q$ setzen. Es ist ferner

$e^{m'x}\int e^{-m'x}V\,dx =$

$$e^{\alpha x}\,(\cos.\beta x + \sin.\beta x\sqrt{-1})\int e^{\alpha x}\,(\cos.\beta x - \sin.\beta x\sqrt{-1})\,V\,dx$$

$$= e^{\alpha x}\,(\cos.\beta x\int e^{-\alpha x}\cos.\beta x\,V\,dx + \sin.\beta x\int e^{-\alpha x}\sin.\beta x\,V\,dx)$$

$$+ e^{\alpha x}\sqrt{-1}(\sin.\beta x\int e^{-\alpha x}\cos.\beta x V dx - \cos.\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x V dx);$$

da sich nun $e^{m''x}$ von $e^{m'x}$ nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheidet, so wird sich auch die Entwickelung von $e^{m''x}\int e^{-m''x}\,V\,dx$ von der vorigen nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheiden; indem wir nun die Differenz dieser beiden Entwickelungen durch $m' - m'' = 2\beta\sqrt{-1}$ dividiren, so erhalten wir

$$\frac{e^{\alpha x}(\sin.\beta x\int e^{-\alpha x}\cos.\beta x\,V\,dx - \cos.\beta x\int e^{-\alpha x}\sin.\beta x\,V\,dx)}{\beta};$$

das Integral ist also gegenwärtig $y = e^{\alpha x}(p\cos.\beta x + q\sin.\beta x)$

$$+\frac{e^{\alpha x}(\sin.\beta x\int e^{-\alpha x}\cos.\beta x V dx - \cos.\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x V dx)}{\beta}.$$

Es sey, z. B., das Integral der Gleichung

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = V$ zu bestimmen. Die beiden Wurzeln der Gleichung $m^2 + a^2 = o$ sind $m' = +a\sqrt{-1}$, $m'' = -a\sqrt{-1}$, es ist also für den gegenwärtigen Fall

$\alpha = o$, $\beta = a$, daher $y = p\sin. ax + q\cos. ax$

$$+\frac{\sin.\alpha x\int\cos. ax\,V\,dx - \cos. ax\int\sin. ax\,V\,dx}{a}.$$

Von der Integration der höheren Differentialgleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen vermittelst unendlicher Reihen.

§. 198.

Es sey eine Differentialgleichung zwischen x, y und ihren Differentialen gegeben.

Es entspreche dem Werthe von $x = a$ der Werth $y = A$; da nun $x = a + (x - a)$, so erhalten wir den allgemeinen Werth von y nach der Taylor'schen Entwickelung, indem wir durch A', A'', A''', u. s. w., die Werthe vorstellen, welche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w., für $x=a$ und $y = A$ erhalten, d. h., wir bestimmen das Integral zwischen den Gränzen $x = a$ und dem unbestimmten x,

$$y = A + A'(x-a) + \frac{A''(x-a)}{1.2} + \frac{A'''(x-a)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Wenn also die Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, so ist der Werth $y = A$, welcher $x = a$ entspricht, unbestimmt; wenn aber dieser Werth gegeben ist, so erhalten wir, indem wir in der Differentialgleichung den Werth von $\frac{dy}{dx}$ nehmen, daraus durch wiederholte Differentiation $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w., herleiten, und sodann in diese Werthe $x = a$ und $y = A$ setzen, die Werthe von A', A'', A''', u. s. w.

Wenn die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist, so sind die Werthe $y = A$ und $\frac{dy}{dx} = A'$, welche $x = a$ entsprechen, unbestimmt; wenn aber diese Werthe gegeben sind, so erhalten wir A'', A''', u. s. w., indem wir aus der Differentialgleichung den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nehmen,

daraus durch wiederholte Differentiation $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w., herleiten, und in die Ausdrücke dieser Differentialquotienten $x = a$, $y = A$ und $\frac{dy}{dx} = A'$ setzen.

Wenn die Differentialgleichung von der dritten Ordnung ist, so sind die Werthe $y = A$, $\frac{dy}{dx} = A'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = A''$, welche $x = a$ entsprechen, unbestimmt; wenn aber diese Werthe gegeben sind, so bestimmen wir die Werthe von A''', u. s. w., indem wir aus der Differentialgleichung $\frac{d^3y}{dx^3}$ ziehen, daraus durch wiederholte Differentiation $\frac{d^4y}{dx^4}$, u. s. w. herleiten, und sodann in die Ausdrücke dieser Differentialquotienten $x = a$, $y = A$, $\frac{dy}{dx} = A'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = A''$ setzen.

In der Gleichung

$$y = A + A'(x-a) + \frac{A''(x-a)^2}{2} + \frac{A'''(x-a)^3}{2.3} + \ldots,$$

welche das allgemeine Integral einer Differentialgleichung vorstellt, bleiben also eben so viel Größen A, A', A'', u. s. w., unbestimmt, als Einheiten in der Ordnung der Differentialgleichung enthalten sind; das Integral einer Differentialgleichung enthält also eben so viele willkürliche Constanten, als Einheiten in der Ordnung derselben enthalten sind, wie wir auch schon §. 183. gesehen haben.

Wenn das Integral zwischen $x = a$ und $x = b$ zu nehmen ist, so haben wir $b - a$ statt $x - a$ in die vorige Reihe zu setzen. Wenn $b - a > 1$, so setzen wir $\frac{b-a}{n} = c$, und nehmen n hinlänglich groß an, damit c nur ein kleiner Bruch sey; wir berechnen das Integral von $x = a$ bis zu $x = a + c$, von $x = a + c$ bis zu $x = a + 2c$, ... und endlich von $x = a + (n-1)c$ bis zu $x = a + nc = b$;

die Summe dieser Integrale wird das gesuchte Integral zwischen den gegebenen Gränzen seyn (§. 170.).

§. 199.

Ein anderes Verfahren, das Integral einer Differentialgleichung durch eine unendliche Reihe auszudrücken, besteht darin, daß man die eine veränderliche Größe gleich setzt einer nach den aufsteigenden oder fallenden Potenzen der andern veränderlichen Größe geordneten Reihe, in welcher die Coeffizienten, und auch, wenn es schicklich befunden wird, die Exponenten unbestimmt angenommen werden; indem man sodann statt dieser veränderlichen Größen und ihrer Differentialen ihre Werthe in die Differentialgleichung setzt, so erhält man eine Gleichung, in welcher nur noch die andere veränderliche Größe vorkömmt, und welche in Bezug auf dieselbe identisch seyn muß, d. h., wenn man sämmtliche Theilsätze in einem Gliede der Gleichung vereinigt, so muß die Summe der Coeffizienten, welche eine nämliche Potenz von x multipliziren, $= o$ seyn; durch die so gebildeten Gleichungen bestimmen wir, wenn es möglich, d. h., wenn die Reihe passend gewählt würde, die Werthe der in derselben vorkommenden unbestimmten Coeffizienten. Dieses Verfahren führt in der Regel nur zu besonderen Integralen; außerdem ist es nur bei solchen Differentialgleichungen mit Vortheil anwendbar, in welchen die eine veränderliche Größe und ihre Differentialen nur in der ersten Potenz vorkommen, indem es in anderen Fällen zu sehr beschwerlichen Rechnungen führt.

Um von dem Gange dieses Verfahrens ein Beispiel zu geben, so wollen wir nach demselben das Integral der Differentialgleichung $d^2y - ay\,x^n\,dx = o$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

Setzen wir also

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\delta} + Cx^{\alpha+2\delta} + Dx^{\alpha+3\delta} + \ldots\ldots,$$

so folgt daraus

$d^2y = [A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B(\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)x^{\alpha+\delta-2} + C(\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)x^{\alpha+2\delta-2} + \ldots.]dx^2$; substituiren wir statt y und d^2y ihre Werthe in die Differentialgleichung, dividiren wir sodann durch dx^2, so erhalten wir

$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B(\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)x^{\alpha+\delta-2}$
$+ C(\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)x^{\alpha+2\delta-2} + \ldots\ldots$
$- Aax^{\alpha+n} - Bax^{\alpha+\delta+n} - Cax^{\alpha+2\delta+n} - \ldots = 0.$

Die beiden die niedrigsten Potenzen von x enthaltenden Theilsätze sind $A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ und $-Aax^{\alpha+n}$; damit nun diese sich aufheben, so müssen vorerst die Exponenten $\alpha-2$ und $\alpha+n$ gleich seyn, welches jedoch nur in dem speziellen Falle stattfindet, wenn $n = -2$. Wir können aber den ersten Theilsatz allein verschwinden machen, wenn wir $\alpha(\alpha-1) = 0$ setzen, d. h., entweder wenn wir $\alpha = 0$, oder wenn wir $\alpha = 1$ setzen.

1) Wenn wir $\alpha = 0$ setzen, so ist

$y = A + Bx^\delta + Cx^{2\delta} + Dx^{3\delta} + \ldots$, und
$B\delta(\delta-1)x^{\delta-2} + C.2\delta(2\delta-1)x^{2\delta-2} + D.3\delta(3\delta-1)x^{3\delta-2}$
$+ \ldots. - Aax^n - Bax^{\delta+n} - Cax^{2\delta+n} - \ldots. = 0.$

Die beiden mit den niedrigsten Potenzen von x behafteten Theilsätze sind jetzt $B\delta(\delta-1)x^{\delta-2}$ und $-Aax^n$; damit nun diese sich aufheben, so muß
$\delta - 2 = n$, $B\delta(\delta-1) = Aa$, daher $\delta = n+2$,
und $B = \frac{Aa}{(n+1)(n+2)}$ seyn; nachdem wir δ so bestimmt haben, so erkennen wir leicht, daß die Exponenten von x in je zwei gleichweit von den vorigen entfernten Theilsätzen dieselben werden; damit nun je zwei solche Theilsätze sich aufheben, so muß $C.2\delta(2\delta-1) = Ba$; $D.3\delta(3\delta-1) = Ca$, u. s. w., seyn; es ist also

$$C = \frac{Ba}{2\delta(2\delta-1)} = \frac{Aa^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)},$$

$$D = \frac{Ca}{3\delta(3\delta-1)} = \frac{Aa^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)},$$

u. s. w., daher $y =$

$A+\frac{Aa}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\frac{Aa^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}x^{2n+4}$ $+\ldots.$; A bleibt also unbestimmt; da nun in der Reihe nur diese einzige unbestimmte Größe vorkömmt, so ist das Integral nur ein besonderes.

2) Wenn wir $\alpha = 1$ setzen, so ist

$y = Ax + Bx^{\delta+1} + Cx^{2\delta+1} + Dx^{3\delta+1} + \ldots.$, und

$B\delta(\delta+1)x^{\delta-1}+C.2\delta(2\delta+1)x^{2\delta-1}+D.3\delta(3\delta+1)x^{3\delta-1}+\ldots$

$-aAx^{n+1} - aBx^{n+\delta+1} - aCx^{n+2\delta+1} - \ldots. = o.$

Die beiden mit den niedrigsten Exponenten von x behafteten Theilsätze sind $B\delta\,(\delta+1)\,x^{\delta-1}$ und $-Aax^{n+1}$; damit nun diese sich aufheben, so muß $\delta-1=n+1$, und $B\delta\,(\delta+1) = aA$, daher $\delta = n+2$, $B = \frac{aA}{\delta\,(\delta+1)}$ $= \frac{aA}{(n+2)\,(n+3)}$ seyn; es ist nun ferner leicht einzusehen, daß vermöge dieses Werthes von δ die Exponenten von x in je zwei Theilsätzen, welche gleichweit von den vorigen entfernt sind, mit einander übereinstimmen; damit nun diese Theilsätze sich aufheben, so muß $C\,.\,2\delta\,(2\delta+1) = aB$, $D\,.\,3\delta\,(3\delta+1) = aC$, u. s. w., seyn; es ist also

$$C = \frac{aB}{2\delta\,(2\delta+1)} = \frac{a^2A}{(n+2)\,(n+3)\,(2n+4)\,(2n+5)},$$

$$D = \frac{aC}{3\delta(3\delta+1)} = \frac{a^3A}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}$$

u. s. w.; es ist also $y = Ax + \frac{Aa}{(n+2)\,(n+3)}x^{n+3}$ $+\frac{a^2A}{(n+1)\,(n+2)\,(2n+4)\,(2n+5)}x^{2n+5}+\ldots.$, A bleibt also wieder unbestimmt; dieses ist jedoch nicht dasselbe A, als in 1; setzen wir also A′ statt des einen dieser beiden A, und addiren wir diese beiden besonderen Integrale, so erhalten wir nach §. 194. das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Von der Integration der Differentialgleichungen zwischen drei oder mehreren noch veränderlichen Größen.

§. 200.

Wenn das erste Glied einer Differentialgleichung von der ersten Ordnung zwischen den drei veränderlichen Größen x, y und z, $Pdx + Qdy + Rdz = o$ ein richtiges Differential einer Funktion von x, y und z ist, so muß diese Gleichung durch die Differentiation einer ursprünglichen Gleichung von der Gestalt $f(x,y,z) = \text{const.}$ entstanden seyn. Wenn wir das erste Glied dieser ursprünglichen Gleichung differentiiren, indem wir nur x und y als veränderlich, also z als beständig betrachten, so erhalten wir dieses Differential, indem wir in dem vollständigen Differentiale $dz = o$ setzen; es ist also $Pdx + Qdy$; da nun dieses ein richtiges Differential nach x und y ist, so ist nach §. 158. $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Eben so zeigen wir nach, daß $Pdx + Rdz$ ein richtiges Differential nach x und z seyn muß, es muß also $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$ seyn; und auf dieselbe Weise muß $Qdy + Rdz$ ein richtiges Differential nach y und z seyn, es muß also $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$ seyn.

Damit also das erste Glied der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = o$ das richtige Differential einer Funktion der drei veränderlichen Größen x, y und z sey, so müssen die drei Bedingnißgleichungen der direkten Integrabilität stattfinden $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$.

§. 201.

Angenommen, daß die Differentialgleichung diesen drei Bedingnissen der direkten Integrabilität Genüge leiste;

sehen wir nun, auf welche Weise wir ihr Integral bestimmen.

Da $Pdx + Qdy$ das Differential von $f(x,y,z)$ nach x und y ist, so ist, indem wir das nach §. 159. zu bestimmende Integral von $Pdx + Qdy$, wobei z als beständig angenommen wird, durch U, und durch Z eine Funktion von z vorstellen, welche wir nachher bestimmen werden, $f(x,y,z) = U + Z$.

Es ist $df(x,y,z) = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz + dZ$;

es ist aber auch $df(x,y,z) = Pdx + Qdy + Rdz$; da nun $\frac{dU}{dx} = P$, $\frac{dU}{dy} = Q$, so ist $\frac{dU}{dz}dz + dZ = Rdz$,

daher $Z = \int\left(R - \frac{dU}{dz}\right)dz$; das vollständige Integral der Differentialgleichung ist also $U + \int\left(R = \frac{dU}{dz}\right)dz = \text{const.}$

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$(Ay + Bz)dx + (Ax + Cz)dy + (Bx + Cy)dz = 0.$

Es ist hier $P = Ay + Bz$, $Q = Ax + Cz$,

$R = Bx + Cy$; da nun $\frac{d(Ay+Bz)}{dy} = A$

$= \frac{d(Ax+Cz)}{dx}$; $\frac{d(Ay+Bz)}{dz} = B = \frac{d(Bx+Cy)}{dx}$,

$\frac{d(Ax+Cz)}{dz} = C = \frac{d(Bx+Cy)}{dy}$, so finden die drei Bedingnißgleichungen der direkten Integrabilität statt.

Es ist, genommen in Bezug auf die Veränderlichkeit von x allein, $\int(Ay + Bz)dx = Axy + Bxz + Y$, und nach §. 159. dieses $Y = \int\left[Ax + Cz - \frac{d(Axy+Bxz)}{dy}\right]dy$

$= \int Czdy = Czy$; es ist also $U = Axy + Bxz + Cyz$, daher

$Z = \int\left(Bx + Cy - \frac{d(Axy + Bxz + Cyz}{dz}\right]dz = 0;$

das Integral der Differentialgleichung ist also

$Axy + Bxz + Cyz = \text{const.}$

§. 202.

Wenn die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ den Bedingnissen der direkten Integrirbarkeit nicht Genüge leistet, so kann sie, wie wir §. 160. gesehen haben, aus dem unmittelbaren Differentiale einer Gleichung zwischen x, y und z entstanden seyn, in welchem sich ein gemeinschaftlicher Faktor durch Division aufhob.

Es sey L dieser Faktor, so ist das erste Glied der Gleichung $L\,P\,dx + L\,Q\,dy + L\,R\,dz = 0$ das unmittelbare Differential einer Funktion von x, y und z; es ist also nach dem vorigen §.

$$\frac{d(LP)}{dy} = \frac{d(LQ)}{dx}, \quad \frac{d(LP)}{dz} = \frac{d(LR)}{dx}, \quad \frac{d(LQ)}{dz} = \frac{d(LR)}{dy},$$

welche Gleichungen gleichbedeutend sind mit

$$P\frac{dL}{dy} - Q\frac{dL}{dx} = L\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right),$$

$$P\frac{dL}{dz} - R\frac{dL}{dx} = L\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right),$$

$$Q\frac{dL}{dz} - R\frac{dL}{dy} = L\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right).$$

Addiren wir die durch R multiplizirte erste, die durch $-Q$ multiplizirte zweite, und die durch P multiplizirte dritte dieser Gleichungen, und dividiren wir sodann die Summe durch L, so ist

$$P\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von L; es ist also nur in dem Falle, wenn dieser Gleichung identisch Genüge geleistet wird, ein Faktor L möglich, durch welchen die Differentialgleichung multiplizirt, in das unmittelbare Differential einer ursprünglichen Gleichung zwischen x, y und z umgewandelt wird. Wenn also dieser Bedingnißgleichung nicht Genüge geschieht, so kann die eine der veränderlichen Größen nicht als eine Funktion der beiden andern betrachtet werden.

§. 203.

Es leiste die Gleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$ der in dem vorigen §. bewiesenen Bedingnißgleichung Genüge; bestimmen wir nun ihr Integral.

Betrachten wir vorerst z als beständig, so ist $P\,dx + Q\,dy = o$; es sey L der Faktor, durch welchen diese Gleichung multiplizirt, direkt integrirbar wird, so ist $L\,P\,dx + L\,Q\,dy = o$, und das Integral dieser Gleichung erscheint, wenn $dV = L\,P\,dx + L\,Q\,dy$, unter der Gestalt $V = Z$, welches Z eine zu bestimmende Funktion von z allein vorstellt. Differentiiren wir diese Gleichung, und bemerken wir, daß $\frac{dV}{dx} = LP$, $\frac{dV}{dy} = LQ$, so ist $L\,P\,dx + L\,Q\,dy + \frac{dV}{dz}\,dz = dZ$; ziehen wir von dieser Gleichung die durch L multiplizirte ursprüngliche Differentialgleichung ab, so erhalten wir $dZ = \left(\frac{dV}{dz} - RL\right)dz$. Dieses Z muß, wie wir gesehen haben, eine Funktion von z allein seyn; es muß daher auch $\frac{dV}{dz} - RL$ eine Funktion von z allein seyn; wir müssen also suchen, durch die Elimination von x und y zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $V = Z$ eine Gleichung zu bilden, in welcher nur Z und z enthalten ist; gelingt uns dieses, so bestimmen wir aus derselben Z durch eine Funktion von z. Lacroix nimmt an, in seinem grand Traité du calcul différentiel et intégral, daß immer, wenn der Bedingnißgleichung des vorigen §. Genüge geleistet wird, x und y durch Elimination verschwinden; allein der Beweis, den er davon zu geben gesucht hat, ist mangelhaft, wie auch J. T. Mayer ganz richtig bemerkt hat; es würde uns jedoch hier zu weit führen, dieses näher auseinanderzusetzen.

Es sey, z. B., die Differentialgleichung

$$dx\,(ay - bz) + dy\,(cz - ax) + dz\,(bx - cy) = o.$$

Es ist gegenwärtig $P = ay - bz$, $Q = cz - ax$, $R = bx - cy$; das erste Glied der Bedingnißgleichung des vorigen §. ist also gegenwärtig $(ay - bz)(-c-c) + (cz-ax)(-b-b) + (bx-cy)(-a-a)$, daher identisch $= 0$.

Betrachten wir vorerst z als beständig, so ist

$$(ay-bz)\,dx + (cz-ax)\,dy = 0, \quad \frac{dx}{cz-ax} + \frac{dy}{ay-bz} = 0;$$

das Integral dieser Gleichung ist $\frac{1}{a}\log.\frac{ay-bz}{cz-ax} = Z$,

$\frac{ay-bz}{cz-ax} = e^{aZ} = Z'$, indem wir die noch zu bestimmende Funktion von z, e^{aZ}, durch Z' bezeichnen.

Damit diese Gleichung das gesuchte Integral sey, so muß ihr vollständiges Differential mit der gegebenen Differentialgleichung übereinstimmen; dasselbe ist

$$\frac{(a\,dy-b\,dz)(cz-ax)-(c\,dz-a\,dx)(ay-bz)}{(cz-ax)^2} = dZ',$$

und nach den gehörigen Reduktionen

$$\frac{a\,dx\,(ay-bz)+a\,dy\,(cz-ax)+a\,dz\,(bx-cy)}{(cz-ax)^2} = dZ';$$

ziehen wir hiervon die durch $\frac{a}{(cz-ax)^2}$ multiplizirte ursprüngliche Differentialgleichung ab, so bleibt übrig $dZ' = 0$, es ist also $Z' = \text{const.}$, daher das gesuchte Integral $\frac{ay-bz}{cz-ax} = \text{const.}$

Die Integration der Differentialgleichungen von höheren Ordnungen zwischen zwei veränderlichen Größen ist so vielen Schwierigkeiten unterworfen, und ist dabei ohnedies in der Anwendung von so geringem Nutzen, daß ich dasjenige, was bis jetzt darüber bekannt ist, füglich übergehen kann.

Von der Integration der partialen Differentialgleichungen.

§. 204.

Wenn eine veränderliche Größe z eine Funktion mehrerer veränderlicher Größen x, y .... ist, und wenn das vollständige Differential von der ersten Ordnung dieser Funktion gegeben ist, so sind dadurch auch ihre ersten partialen Differentialquotienten nach allen diesen veränderlichen Größen gegeben (§. 75.); denn um, z. B., den partialen Differentialquotienten nach x zu erhalten, so haben wir in der Differentialgleichung die anderen veränderlichen Größen y .... als beständig anzusehen, d. h., ihre Differentialen $= 0$ zu setzen, und sodann die Differentialgleichung durch dx zu dividiren.

Umgekehrt, wenn sämmtliche Differentialquotienten von der ersten Ordnung einer veränderlichen Größe nach allen veränderlichen Größen, von welchen sie eine Funktion ist, gegeben sind, so sind dadurch auch ihre partialen Differentialen nach diesen veränderlichen Größen gegeben; wir erhalten sodann ihr vollständiges Differential durch die Addition dieser partialen Differentialen.

Es sey z eine Funktion der beiden veränderlichen Größen x und y, und $dz = p\,dx + q\,dy$, also $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$.

Wenn die Werthe von p und q durch Funktionen von x, y und z gegeben sind, so können wir dadurch die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y, z und der willkürlichen Constante, aus welcher die gegebene Differentialgleichung entsteht, bestimmen, vorausgesetzt nämlich, daß der Bedingnißgleichung von §. 202. identisch Genüge geschieht. Eine solche ursprüngliche Gleichung läßt sich aber nicht mehr be-

stimmen, wenn nur p oder q, oder auch nur eine Gleichung zwischen p und q gegeben ist.

§. 205.

Der einfachste dieser beiden Fälle ist der erste, wenn nämlich der eine Differentialquotient gegeben ist.

Es sey also $\frac{dz}{dx} = P$, d. h., das partiale Differential von z nach x, $dz = P\,dx$. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden; entweder ist P eine gegebene Funktion von x und y allein, oder es kömmt in P auch z vor.

1) Wenn die erste Annahme stattfindet, so muß die Differentialgleichung $dz = P\,dx$ durch die Differentiation nach x einer Gleichung von der Gestalt $z = f(x, y)$ entstanden seyn; da nun die Differentialen von allen Theilsätzen, in welchen nur Funktionen von y vorkommen, Null sind, so müssen wir nach erfolgter Integration nach x des zweiten Gliedes der Gleichung demselben eine willkürliche Funktion von y beifügen, und erhalten so $z = \int P\,dx + Fy$. Wir können annehmen, daß in dieser willkürlichen Funktion von y schon die willkürliche Constante begriffen ist.

Es sey, z. B., $P = \cos. \frac{x}{y}$, so ist

$z = \int \cos. \frac{x}{y}\,dx + Fy = y \sin. \frac{x}{y} + Fy$, weil bei dieser Integration y als beständig anzusehen ist.

2) Wenn in P auch noch z enthalten ist, so ist entweder die Gleichung $dz = P\,dx$ direkt nach z und x integrirbar, oder es ist das erste Glied der Gleichung $dz - P\,dx = o$, multiplizirt durch einen integrirenden Faktor L, als ein richtiges Differential einer Funktion von x, y, z nach x und z anzusehen; es ist also dann $\int (dz - P\,dx)\,L = Fy$.

Es sey, z. B., $P = \frac{yx^n}{z^m}$, so ist $dz = \frac{yx^n\,dx}{z^m}$,

$z^m\,dz = yx^n\,dx$, $\frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{yx^{n+1}}{n+1} + Fy$.

§. 206.

Angenommen nun, daß zwischen den Differentialquotienten p nach x und q nach y von z eine Gleichung von der Gestalt $Pp + Qq = R$ gegeben ist.

Setzen wir in den vollständigen Ausdruck des Differentials von z, $dz = p\,dx + q\,dy$, den aus der vorigen Gleichung gezogenen Werth $p = \frac{R - Qq}{P}$, so ist

$$dz = \frac{R - Qq}{P}\,dx + q\,dy, \text{ daher } P\,dz - R\,dx = p(P\,dy - Q\,dx).$$

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn P, Q und R so beschaffen sind, daß $P\,dz - R\,dx$ nur Funktionen von z und x, und $P\,dy - Q\,dx$ nur Funktionen von y und x enthalten, so gibt es einen Faktor L, durch welchen $P\,dz - R\,dx$ multiplizirt, und einen Faktor L′, durch welchen $P\,dy - Q\,dx$ multiplizirt, in richtige Differentialen verwandelt werden. Multipliziren wir also diese Gleichung durch $L\,L'$, so ist

$$L\,L'\,(P\,dz - R\,dx) = L\,L'\,q\,(P\,dy - Q\,dx),$$

$$L\,(P\,dz - R\,dx) = \frac{Lq}{L'}\,L'\,(P\,dy - Q\,dx).$$

Es sey $L\,(P\,dz - R\,dx) =$ dem richtigen Differentialen dV, und $L'\,(P\,dy - Q\,dx) =$ dem richtigen Differentialen dU, so ist $dV = \frac{Lq}{L'}\,dU$; da nun q unbestimmt ist, so können wir annehmen, daß $\frac{Lq}{L'} =$ einer Funktion von U, welche wir durch $\varphi' U$ vorstellen wollen, es ist also $dV = \varphi' U \,.\, dU$; das Integral von $\varphi' U\,dU$ ist nun offenbar wieder eine Funktion von U, welche wir durch φU vorstellen wollen; das gesuchte Integral ist also $V = \varphi U$.

Es sey, z. B., $y\,\frac{dz}{dx} - x\,\frac{dz}{dy} = 0$. Es ist gegenwärtig $P = y$, $Q = -x$, $R = 0$, daher

$$y\,dz = q\,(x\,dx + y\,dy).$$

Die integrirenden Faktoren von $y\,dz$ und $x\,dx + y\,dy$ sind $L = \frac{1}{y}$, und $L' = \frac{1}{2}$; es ist also

$dz = 2qy\left(\frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{2}y\,dy\right)$, $dz = 2qy \,.\, d(x^2 + y^2)$; es ist also $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

Es sey die Differentialgleichung $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = nz$. Es ist gegenwärtig $P = x$, $Q = y$, $R = nz$, daher $x\,dz - nz\,dx = q(x\,dy - y\,dx)$.

Der integrirende Faktor von $x\,dz - nz\,dx$ ist $L = \frac{1}{x^{n+1}}$, und der integrirende Faktor von $x\,dy - y\,dx$ ist $L' = \frac{1}{x^2}$; da nun $\frac{x\,dz - nz\,dx}{x^{n+1}} = d \,.\, \frac{z}{x^n}$, und $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d \,.\, \frac{y}{x}$, so ist die Differentialgleichung gleichbedeutend mit $d \,.\, \frac{z}{x^n} = q\,x^{n-1}\,d \,.\, \frac{y}{x}$; es ist also gegenwärtig $V = \frac{z}{x^n}$, $U = \frac{y}{x}$, $\varphi' U = q\,x^{n-1}$, daher das gesuchte Integral: $\frac{z}{x^n} = \varphi\,\frac{y}{x}$, $z = x^n\,\varphi\,\frac{y}{x}$.

Wenn diese unbestimmte Funktion eine algebraische ist, so ist $x^n\,\varphi\,\frac{y}{x}$ eine homogene Funktion von der Dimension n; die obige Differentialgleichung $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = nz$ drückt also eine allgemeine Eigenschaft der homogenen Funktionen zweier veränderlicher Größen aus, welche wir auch schon §. 163. direkt bewiesen haben.

§. 207.

2) Wenn aber nicht zugleich $P\,dz - R\,dx$ nur z und x, und $P\,dy - Q\,dx$ nur x und y enthält, so lassen sich diese

beiden Differentialen nicht mit Hülfe eines integrirenden Faktors integriren; denn in dem ersten Differentiale darf nicht y, in dem zweiten darf nicht z als beständig angenommen werden, weil sonst x als unabhängig zugleich von y und z betrachtet werden müßte, welches bei einer Gleichung zwischen drei veränderlichen Größen nicht der Fall seyn kann.

Ich behaupte nun, daß, wenn wir aus der Verbindung der beiden Gleichungen $P\,dz - R\,dx = o$, $P\,dy - Q\,dx = o$ zwei Differentialgleichungen ableiten, welche integrirbar sind, und deren Integrale unter der Gestalt erscheinen $V =$ einer Constante a, $U =$ einer Constante b, die Gleichung $V = \varphi U$ der Differentialgleichung Genüge leistet, welches φU wieder eine willkürliche Funktion von U vorstellt.

Um dieses zu beweisen, so schreiben wir die vollständigen Differentiale der Gleichungen $V = a$ und $U = b$ an:

$$\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dy}\,dy + \frac{dV}{dz}\,dz = o,$$

$$\frac{dU}{dx}\,dx + \frac{dU}{dy}\,dy + \frac{dU}{dz}\,dz = o;\ \text{da nun}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{Q}{P}\frac{dV}{dy} - \frac{R}{P}\frac{dV}{dz},\quad \frac{dU}{dx} = -\frac{Q}{P}\frac{dU}{dy} - \frac{R}{P}\frac{dU}{dz}.$$

Es sey $dV = \varphi' U\,dU$, welches $\varphi' U$ also abermals eine unbestimmte Funktion von U vorstellt; diese Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = \varphi' U\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz\right);$$

setzen wir statt $\frac{dV}{dx}$ und $\frac{dU}{dx}$ ihre vorhin gefundenen Werthe, so ist

$$\frac{dV}{dy}(P\,dy - Q\,dx) + \frac{dV}{dz}(P\,dz - R\,dx)$$

$$= \varphi' U\left[\frac{dU}{dy}(P\,dy - Q\,dx) + \frac{dU}{dz}(P\,dz - R\,dx)\right];$$

es ist also

$$P\,dy - Q\,dx = \frac{\varphi' U \frac{dU}{dz} - \frac{dV}{dz}}{\frac{dV}{dy} - \varphi' U \frac{dU}{dy}} (P\,dz - R\,dx).$$

Die Größe, welche $P\,dz - R\,dx$ multiplizirt, ist unbestimmt, weil sie das unbestimmte $\varphi' U$ enthält; stellen wir sie durch M vor, so ist $P\,dy - Q\,dx = M(P\,dz - R\,dx)$; indem wir $dx = o$ setzen, so erhalten wir den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{M} = q$; indem wir $dy = o$ setzen, so erhalten wir den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = \frac{MR - Q}{MP} = p;$$

p und q bleiben also unbestimmt, wie gehörig.

Multipliziren wir die erste dieser Gleichungen durch Q, die zweite durch P, und addiren wir sie sodann, so erhalten wir $Pp + Qq = \frac{Q}{M} + \frac{MR - Q}{M} = R$, welches die Gleichung ist, die nach Annahme zwischen p und q stattfindet.

Wir müssen uns also bestreben, aus den beiden Gleichungen $P\,dy - Q\,dx = o$, und $P\,dz - R\,dx = o$ zwei andere herzuleiten, welche entweder direkt, oder mit Hülfe eines integrirenden Faktors integrirt werden können. Wie dieses geschieht, wollen wir an den folgenden Beispielen sehen.

Es sey die Differentialgleichung $pxz + qyz = xy$. Es ist hier $P = xz$, $Q = yz$, $R = xy$, daher gegenwärtig $xz\,dz - xy\,dx = q(xz\,dy - yz\,dx)$.

Setzen wir $xz\,dz + xy\,dx = o$, $xz\,dy - yz\,dx = o$, so folgt aus der zweiten Gleichung $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = o$, deren Integral $\log. y - \log. x = \log. \frac{y}{x} = \log. c$, $\frac{y}{x} = c$ ist; dividiren wir die erste Gleichung durch x, und setzen wir dann cx statt y, so ist $z\,dz - cx\,dx = o$, daher

$z^2 - cx^3 = a$, folglich, indem wir ſtatt c ſeinen Werth $\frac{y}{x}$ ſetzen, $z^2 - xy = a$; das geſuchte Integral iſt alſo $z^2 - xy = \varphi \frac{y}{x}$, $z^2 = xy + \varphi \frac{y}{x}$.

Es ſey die Differentialgleichung $x^2 p + y^2 q = x^2 y^2 z^2$. Es iſt hier $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = x^2 y^2 z^2$, daher $x^2 dz - x^2 y^2 z^2 dx = q (x^2 dy - y^2 dx)$.

Von den beiden Gleichungen $x^2 dz - x^2 y^2 z^2 dx = o$, $x^2 dy - y^2 dx = o$ iſt gegenwärtig nur die letztere direkt integrirbar, da ſie gleichbedeutend iſt mit $\frac{dy}{y^2} - \frac{dx}{x^2} = o$, woraus, indem wir die willkürliche Conſtante durch $\frac{1}{c}$ vorſtellen, $-\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = c$ folgt; es iſt alſo

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{c} = \frac{cy}{c+y}$, daher $x = \frac{cy}{c+y}$, folglich $dx = \frac{x^2 dy}{y^2} = \frac{c^2 dy}{(c+y)^2}$; ſetzen wir dieſen Werth in die erſte Gleichung, nachdem wir dieſelbe durch x^2 dividirt haben, ſo iſt $dz - \frac{c^2 y^2 z^2}{(c+y)^2} dy = o$, $-\frac{dz}{z^2} + \frac{c^2 y^2}{(c+y)^2} dy = o$, daher $\frac{1}{z} + c^2 \int \frac{y^2 dy}{(c+y)^2} =$ einer Conſtanten a.

Setzen wir $c + y = v$, ſo iſt

$$\int \frac{y^2 dy}{(c+y)^2} = \int \frac{(v-c)^2 dv}{v^2} = v - 2c \log. v - \frac{c^2}{v}$$

$= c + y - 2c \log. (c + y) - \frac{c^2}{c+y}$, daher

$\frac{1}{z} + c + y - 2c \log. (c + y) - \frac{c^2}{c+y} = a.$

Aus $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$ folgt aber $c = \frac{xy}{y-x}$, und $c + y = \frac{y^2}{y-x}$; es iſt alſo

$$\frac{1}{z} + \frac{y^2}{y-x} - \frac{2xy}{y-x} \log. \frac{y^2}{y-x} - \frac{x^2}{y-x} = a,$$

$$\frac{1}{z} + y + x - \frac{2xy}{y-x} \log. \frac{y^2}{y-x} = a;$$ das gesuchte Integral ist also

$$\frac{1}{z} + y + x - \frac{2xy}{y-x} \log. \frac{y^2}{y-x} = \varphi \frac{xy}{y-x},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2xy}{y-x} \log. \frac{y^2}{y-x} - x - y + \varphi \frac{xy}{y-x}.$$

§. 208.

Damit das zweite Differential einer Funktion z von x und y bestimmt sey, so müssen die drei Differentialquotienten von der zweiten Ordnung, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2y}{dydx}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$, durch Funktionen der ersten Differentialquotienten und x, y und z selbst gegeben seyn; es ist dann das vollständige zweite Differential

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2.$$

Setzen wir nun, wie bisher, die ersten Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$; setzen wir ferner die zweiten Differentialquotienten

$\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx} = s$, $\frac{d^2z}{dy^2} = t$, so ist

$dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, und $d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$.

Es sey nun eine Gleichung zwischen den Differentialquotienten von der zweiten Ordnung von der Gestalt $Rr + Ss + Tt = U$ gegeben; R, S, T und U seyen gegebene Funktion der ersten Differentialquotienten und der veränderlichen Größen; bestimmen wir daraus das Verhalten, welches zwischen den veränderlichen Größen stattfindet.

Setzen wir in diese Gleichung aus den vorhergehenden $r = \frac{dp - s\,dy}{dx}$, $t = \frac{dq - s\,dx}{dy}$, so ist

$$R \cdot \frac{dp - s\,dy}{dx} + Ss + T \cdot \frac{dq - s\,dx}{dy} = U,$$

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - U\,dx\,dy = s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2);$$

in dieser Gleichung kömmt also noch das unbestimmte s vor. Ich behaupte nun, daß, wenn wir aus der Verbindung der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ mit den beiden Gleichungen

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - U\,dx\,dy = o,$$

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = o$$

zwei Integrale von der Gestalt $M =$ einer willkürlichen Constanten a, $N =$ einer willkürlichen Constanten b herleiten, die Gleichung $N = \varphi M$ der ursprünglichen Differentialgleichung Genüge leisten wird, welches φM wieder eine willkürliche Funktion von M vorstellt.

Wenn man die letztere dieser drei Gleichungen nach $\frac{dy}{dx}$ auflöst, und die beiden Wurzeln von $\frac{dy}{dx}$ durch m' und m'' vorstellt, so können wir statt dem Systeme der drei vorigen Gleichungen entweder die drei Gleichungen $dy = m'\,dx$, $dz = (p + qm')\,dx$, $Rm'\,dp + T\,dq - Um'\,dx = o$, oder die drei Gleichungen $dy = m''\,dx$, $dz = (p + qm'')\,dx$, $Rm''\,dp + T\,dq - Um''\,dx = o$ setzen. Da die ersten Glieder der Gleichungen $M = a$, $N = b$ Funktionen von x, y, z, p und q sind, so ist

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = o,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = o.$$

Setzen wir nun, z. B., aus dem ersten Systeme der drei vorhergehenden Gleichungen statt dy, dz und dq ihre Werthe, so verwandeln sich die beiden letzteren Gleichungen in

$$\left[\frac{dM}{dx} + m'\frac{dM}{dy} + (p + qm')\frac{dM}{dz} + \frac{Um'}{T}\frac{dM}{dq}\right] dx$$

$$+ \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq}\right) dp = o,$$

$$\left[\frac{dN}{dx} + m'\frac{dN}{dy} + (p + qm')\frac{dN}{dz} + \frac{Um'}{T}\frac{dN}{dq}\right] dx$$

$$+ \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq}\right) dp = o.$$

Da M und N Funktionen von den fünf Größen x, y, z, p und q sind, so können wir annehmen, daß die Änderungen dp und dx unabhängig von einander sind; wir können also in den beiden vorhergehenden Gleichungen die Multiplikatoren von dp und dx = o setzen, woraus folgt

$$\frac{dM}{dx} + m'\frac{dM}{dy} + (p + qm')\frac{dM}{dz} + \frac{Um'}{T}\frac{dM}{dq} = o,$$

$$\frac{dM}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq} = o,$$

$$\frac{dN}{dx} + m'\frac{dN}{dy} + (p + qm')\frac{dN}{dz} + \frac{Um'}{T}\frac{dN}{dq} = o,$$

$$\frac{dN}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq} = o.$$

Aus $N = \varphi M$ folgt $dN = \varphi' M\,dM$, daher, indem wir statt dM und dN ihre vollständigen Werthe setzen,

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq =$$

$$\varphi' M\left(\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq\right).$$

Substituiren wir aus den vier vorhergehenden Gleichungen statt $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dp}$, $\frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dp}$ ihre Werthe, so ist, indem wir bemerken, daß $\frac{dM}{dz}dz = \frac{dM}{dz}(p\,dx + q\,dy)$, und sodann die gehörigen Reduktionen vornehmen,

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-m'dx)+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rm'dp+Tdq-Um'dx)$$
$$=\varphi'M\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-m'dx)$$
$$+\frac{1}{T}\varphi'M\cdot\frac{dM}{dq}(Rm'dp+Tdq-Um'dx).$$

Setzen wir, um abzukürzen,

$$\alpha=\frac{\varphi'M\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)-\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)}{\frac{1}{T}\left(\varphi'M\frac{dM}{dq}-\frac{dN}{dq}\right)},$$ welches α unbestimmt ist, weil in seinem Ausdrucke die unbestimmte Funktion $\varphi'M$ vorkömmt, so ist

$$Rm'dp+Tdq-Um'dx=\alpha(dy-m'dx).$$

Setzen wir statt dp und dq ihre Werthe $rdx+sdy$ und $sdx+tdy$, so ist $dx(m'Rr+Ts-Um'+\alpha m')=dy(Rm's+Tt-\alpha)=0$.

Damit $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt bleibe, so müssen die Multiplikatoren von dx und $dy=0$ seyn; es ist also $m'Rr+Ts-Um'=-\alpha m'$, $Rm's+Tt=\alpha$, daher $m'Rr+Ts-Um'=-Rm'^2s-m'Tt$; aus der Gleichung $Rdy^2-\int dxdy+Tdx^2=0$ folgt aber, weil $m'=\frac{dy}{dx}$, $Rm'^2=Sm'-T$; substituiren wir diesen Werth, und dividiren wir durch m', so ist $Rr+Ss+Tt-U=0$, welche Gleichung mit der ursprünglichen zwischen r, s und t gegebenen übereinstimmt.

Das ganze Verfahren reduzirt sich also darauf, aus der Verbindung der drei Gleichungen $dy=m'dx$, $dz=pdx+qdy=(p+m'q)dx$, $Rm'p+Tdq-Um'dx=0$, oder der drei Gleichungen $dy=m''dx$, $dz=pdx+qdy=(p+m''q)dx$, $Rm''dp+Tdq-Um''dx=0$, welches m' und m'' die Wurzeln von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $Rdy^2-\int dydx+Tdx^2=0$ vorstellen, zwei Integrale

von der Gestalt $M = a$, $N = b$ herzuleiten; es wird dann $N = \varphi M$ das Integral der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung $Rr + Ss + Tt = U$ seyn.

Ein jedes System dieser drei Gleichungen findet statt zwischen den fünf veränderlichen Größen p, q, x, y und z; durch die Elimination zweier dieser Größen erhalten wir also eine Gleichung zwischen den drei andern Größen, welche der Bedingnißgleichung von §. 202. identisch Genüge leisten muß, damit aus derselben eine endliche Gleichung zwischen diesen drei veränderlichen Größen herleitbar sey. Es würde uns jedoch zu weit führen, wenn wir näher untersuchen wollten, welche Betrachtungen eintreten, wenn dieser Bedingnißgleichung nicht identisch Genüge geschieht.

§. 209.

Wenden wir dieses auf einige Beispiele an. Es sey die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung $x^2 r + 2xy s + y^2 t = o$. Es ist hier $R = x^2$, $S = 2xy$, $T = y^2$, $U = o$; nach erfolgter Substitution statt r und t erhalten wir also die Gleichung

$$x^2 dp\, dy + y^2 dq\, dx = s(x^2 dy^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2 dx^2).$$

Die Gleichung $x^2 dy^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2 dx^2 = o$ ist gleichbedeutend mit $(x\, dy - y\, dx)^2 = o$, $x\, dy - y\, dx = o$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; es ist also gegenwärtig $m' = m'' = \frac{y}{x}$; die beiden Systeme der drei Gleichungen des vorigen §. stimmen also gegenwärtig mit einander überein; und sind

$$dy - \frac{y}{x} dx = o,\quad dz = p\, dx + q\, dy = \left(p + \frac{y}{x} q\right) dx,$$

$$x^2 . \frac{y}{x} dp + y^2 dq = o,\text{ oder, was dasselbe ist, } x\, dp + y\, dq = o.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $\frac{y}{x} = a$, $y = ax$, welches a eine willkürliche Constante vorstellt; setzen wir diesen Werth in die dritte Gleichung, so folgt daraus $dp + a\, dq = o$, es ist also $p + aq = b$, welches b aber-

abermals eine willkürliche Constante vorstellt; es ist also

$$p + aq = \varphi\,\frac{y}{x},\ \text{d. h.},\ p + \frac{y}{x}\,q = \varphi\,\frac{y}{x}.$$

Setzen wir den aus dieser Gleichung gezogenen Werth von p in die zweite Gleichung, so ist

$$dz = dx\left(\varphi\,\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\,q\right) + q\,dy,$$

$$dz - dx\,\varphi\,\frac{y}{x} = q\left(dy - \frac{y}{x}\,dx\right).$$

Um das Integral dieser Differentialgleichung nach §. 207. zu bestimmen, so setzen wir $dz - dx\,\varphi\,\frac{y}{x} = o$,

$dy - \frac{y}{x}\,dx = o$. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt abermals $\frac{y}{x} = a$; setzen wir diesen Werth in die erste Gleichung, so ist $dz - dx\,\varphi\,a = o$, daher $z - x\,\varphi\,a$ = einer Constanten c, oder, was dasselbe ist, $z - x\varphi\,\frac{y}{x} = c$; das gesuchte Integral der Differentialgleichung $x^2 r + 2xy\,s + y^2\,t = o$ ist also

$z - x\,\varphi\,\frac{y}{x} = f\,\frac{y}{x}$, $z = x\,\varphi\,\frac{y}{x} + f\,\frac{y}{x}$, welches φ und f zwei verschiedene Funktionen vorstellen.

Es sey die Differentialgleichung $r + As + Bt = xy$, und A und B beständig. Es ist hier $R = 1$, $S = A$, $T = B$, $U = xy$; wir gelangen also zu der Gleichung

$$dp\,dy + B\,dq\,dx - xy\,dx\,dy = s\,(dy^2 - A\,dx\,dy + B\,dx^2);$$

die beiden Systeme der drei Gleichungen des vorigen §. sind also gegenwärtig

$dy = m'\,dx$, $dz = p\,dx + q\,dy$,

$m'\,dp + B\,dq - m'\,xy\,dx = o$;

$dy = m''\,dx$, $dz = p\,dx + q\,dy$,

$m''\,dp + B\,dq - m''\,xy\,dx = o$, indem wir wieder durch m' und m'' die beiden Wurzeln von $\frac{dy}{dx}$ aus der Glei=

chung $dy^2 - A\,dx\,dy + B\,dx^2 = o$ vorstellen; es ist also darnach $m' + m'' = A$, $m'\,m'' = B$.

Betrachten wir das erste System der drei Gleichungen; aus der ersten derselben folgt $y - m'x =$ einer Constanten a; setzen wir diesen Werth von y in die dritte Gleichung, so ist $m'\,dp + B\,dq - m'x\,(m'x + a)\,dx = o$; da nun $B = m'\,m''$, so erhalten wir, indem wir diese Gleichung durch m' dividiren, und integriren

$$p + m''q - x^2\left(\frac{m'x}{3} + \frac{a}{2}\right) = \text{einer Constanten b,}$$

daher, indem wir statt a wieder seinen Werth setzen,

$$p + m''q - x^2\left(\frac{y}{2} = \frac{m'x}{6}\right) = b;$$ es ist also

$$p + m''q - x^2\left(\frac{y}{2} - \frac{m'x}{6}\right) = \varphi\,(y - m'x).$$

Setzen wir den hieraus gezogenen Werth von p in die zweite Gleichung, so ist

$$dz = dx\left[-m''q + x^2\left(\frac{y}{2} - \frac{m'x}{6}\right) + \varphi(y - m'x)\right]dx + q\,dy,$$

$$dz - x^2\left(\frac{y}{2} - \frac{m'x}{6}\right)dx - \varphi\,(y - m'x)\,dx$$

$= q\,(dy - m''\,dx)$. Um diese Gleichung nach §. 207. zu integriren, so setzen wir $dy - m''\,dx = o$,

$$dz - x^2\left(\frac{y}{2} - \frac{m'x}{6}\right)dx - \varphi\,(y - m'x)\,dx = o.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $y - m''x =$ einer Constanten c, also $y = m''x + c$; setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung, so ist $dz - x^2\left(\frac{m''x + c}{2} - \frac{m'x}{6}\right)dx$

$- \varphi\,[(m'' - m')\,x + c]\,dx = o$, deren Integral ist, weil $\int [\varphi\,(m'' - m')\,x + c]\,dx$ offenbar wieder eine Funktion von $(m'' - m')\,x + c$ ist, welche wir durch $f[(m'' - m')\,x + c]$ vorstellen wollen,

$$z - \frac{m''x^4}{2.4} - \frac{cx^3}{2.3} + \frac{m'x^4}{4.6} - f\,[(m'' - m')\,x + c]$$

$=$ einer Constante e; setzen wir statt c wieder seinen

Werth $y - m''x$, so ist $z + \frac{m'x^4}{4.6} + \frac{m''x^4}{4.6} - \frac{yx^3}{2.3}$ $- f(y - m'x) = e$; das gesuchte Integral der Differentialgleichung ist also

$$z + \frac{m'+m''}{4.6} x^4 - \frac{yx^3}{2.3} - f(y - m'x) = F(y - m''x);$$

es ist also

$$z + \frac{m'+m''}{4.6} . x^4 - \frac{yx^3}{2.3} = f(y - m'x) + F(y - m''x).$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf m' und m''; wir würden also zu demselben Resultate gelangt seyn, wenn wir von dem Systeme der drei andern Gleichungen ausgegangen wären.

§. 210.

Die Integration der Gleichungen mit partialen Differentialen von höheren Ordnungen ist bis jetzt nur in einigen speziellen Fällen gelungen; ich werde mich also begnügen, einige der leichteren hier anzuführen.

Es sey die Differentialgleichung $\frac{d^n z}{dx^n} = P$, und P eine Funktion von x und y. Da nun diese Gleichung gleichbedeutend ist mit $\frac{d\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = P$, so haben wir bei der Integration nur x als veränderlich zu betrachten, und erhalten so $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \int P dx + fy$, welches fy eine willkürliche Funktion von y vorstellt. Durch fortgesetzte Integrationen gelangen wir auf die angegebene Weise zu einer endlichen Gleichung zwischen x, y und z, in welcher an der Stelle der n willkürlichen Constanten n unbestimmte Funktionen von y enthalten seyn werden.

Auf dieselbe Weise integriren wir die Gleichung $\frac{d^n z}{dy^n} = Q$, wenn dieses Q nur eine Funktion von x und y ist.

Wenn die Differentialgleichung unter der Gestalt erscheint $f\left(x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1} z}{dy^n dx}, \ldots\ldots \frac{d^{n+m} z}{dy^n dx^m}\right) = o$, so verwandelt sich dieselbe, indem wir $\frac{d^n z}{dy^n} = u$ setzen, in

$f\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \ldots\ldots \frac{d^m u}{dx^m}\right) = o$, in welcher Gleichung y als beständig zu betrachten ist; diese Gleichung ist also eine Differentialgleichung von der m ten Ordnung zwischen den zwei veränderlichen Größen x und u; durch die Integration derselben gelangen wir also zu einer Gleichung $u = \frac{d^n z}{dy^n} = Q$, welches Q m willkürliche Funktionen von y enthalten wird; diese Gleichung integriren wir nun wie vorhin.

Eben so verfahren wir, wenn die Differentialgleichung von der Gestalt ist

$f\left(x, y, \frac{d^n z}{dx^n}, \frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}, \ldots\ldots \frac{d^{n+m} z}{dx^n dy^m}\right) = o$, indem wir $\frac{d^n z}{dx^n} = v$ setzen.

Variationenrechnung.

§. 211.

Die Variationenrechnung hat zum Zwecke, einen Ausdruck, der schon nach einem Gesetze der Veränderlichkeit differentiirt wurde, nach einem andern Gesetze der Veränderlichkeit zu differentiiren.

Es sey, z. B., $\int V dx$ zwischen gegebenen Gränzen zu berechnen; V sey eine Funktion von x, y und den Differentialen dieser veränderlichen Größen. Wenn eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so ziehen wir daraus die durch Funktionen von x ausgedrückten Werthe von y und den Differentialquotienten dieser veränderlichen Größe, und substituiren dieselben in V, welches dann nur noch Funktionen von x enthalten wird; wir erhalten also jetzt nach

den Regeln der Integralrechnung den bestimmten Werth von $\int V dx$.

Es sey nun aber das Verhalten, welches zwischen x und y stattfindet, nicht gegeben; es sey $\int V dx$ zwischen gegebenen Gränzen zu nehmen, und V auf dieselbe Weise wie vorhin ausgedrückt; es sey nun die Frage, welches Verhalten muß zwischen x und y stattfinden, damit $\int V dx$ zwischen diesen Gränzen ein **maximum** oder **minimum** sey?

Jetzt haben wir also eine doppelte Art der Veränderlichkeit von x, y und ihren Differentialen zu betrachten:

1) Die Art der Veränderlichkeit, unter welcher dieses Integral aufgestellt wurde.

2) Da einem jeden gegebenen Verhalten zwischen x und y ein bestimmter Werth von $\int V dx$ zwischen den gegebenen Gränzen entspricht, so haben wir anzunehmen, daß auch die Art dieses Verhaltens veränderlich sey, und nachzusuchen, für welches Verhalten zwischen x und y $\int V dx$ ein **maximum** oder **minimum** ist.

Die Änderungen, welche x, y und ihre Differentialen nach dem Gesetze erleiden, unter welchem das Differential aufgestellt wurde, deuten wir, wie bisher, durch die Vorsetzung von d an; dagegen die Änderungen, welche x, y und ihre Differentialen dadurch erleiden, daß das Verhalten zwischen x und y ein anderes wird, deuten wir durch die Vorsetzung des Zeichens δ an, und nennen dieselben die Variationen der veränderlichen Größen.

§. 212.

Die bisherigen Betrachtungen werden uns deutlicher werden, wenn wir dieselben geometrisch darstellen.

Es sey (Fig. 24.) PEQ eine krumme Linie, deren Lauf durch ein zwischen den Coordinaten x und y gegebenes Verhalten bestimmt wird; es seyen $x = AB$ und $x = AC$ die Gränzen, zwischen welchen $\int V dx$ zu nehmen ist; es sey E ein Punkt der krummen Linie, dessen $x = AD$ und $y = DE$, so sind die Coordinaten des unendlich wenig von dem vori-

gen verschiedenen Punktes F derselben $AH = x + dx$ und $FH = y + dy$.

Einem andern Verhalten zwischen x und y entspricht eine andere krumme Linie PGQ, welche wieder durch die den Gränzen des Integrals angehörenden Punkte P und Q gehen. Die Beschaffenheit unserer Aufgabe, nämlich das maximum oder minimum von $\int V dx$ zu bestimmen, veranlaßt uns, anzunehmen, daß die beiden krummen Linien PEQ und PGQ, welche wir mit einander vergleichen, unendlich wenig von einander verschieden sind. Wenn wir die unendlich wenig von einander verschiedenen Coordinaten zweier unendlich nahe bei einander liegender Punkte vergleichen, so drücken wir nach dem vorigen §. die verschwindend kleine Differenz dieser Coordinaten durch die Vorsetzung des Zeichens d aus, wenn die Punkte auf einer nämlichen krummen Linie liegen; dagegen drücken wir dieselbe durch die Vorsetzung des Zeichens δ aus, wenn die Punkte auf zwei verschiedenen krummen Linien liegen.

Die Ordinate DG der krummen Linie PGQ, welche der Abszisse AD entspricht, ist $y + \delta y$, und es ist $GE = \delta y$; es sey I ein Punkt dieser krummen Linie, welcher unendlich wenig von G entfernt ist, dessen Abszisse AH also $= x + dx$, so ist dessen Ordinate $IH = GD + d \cdot GD = y + \delta y + d(y + \delta y) = y + \delta y + dy + d\delta y$. Zu dem Ausdrucke dieser Ordinate können wir aber auch auf eine andere Weise gelangen; es sey $FH = y + dy$ die Ordinate der krummen Linie PEQ, welche der Abszisse $x + dx$ entspricht; die Ordinate IH der krummen Linie PGQ, welche derselben Abszisse entspricht, ist $FH + \delta \cdot FH = y + dy + \delta(y + dy) = y + dy + \delta y + \delta dy$; diese beiden Ausdrücke von IH müssen aber mit einander übereinstimmen; es ist also

$$y + \delta y + dy + d\delta y = y + dy + \delta y + \delta dy,$$

daher $d\delta y = \delta dy$.

§. 213.

In dem vorigen §. haben wir also gesehen, daß im allgemeinen $\delta dy = d\delta y$; hieraus folgt nun ferner $\delta d^2y = \delta ddy = d\delta dy$; $\delta d^3y = \delta d d^2y = d\delta d^2y$; $\delta d^4y = \delta d d^3y = d\delta d^3y$; und im allgemeinen $\delta d^ny = d\delta d^{n-1}y = d^n \delta y$.

Ein ähnlicher Satz gilt in Beziehung auf die Integralen. Setzen wir nämlich $\int V dx = W$, so ist $V dx = dW$; da nun $d\delta W = \delta dW$, so erhalten wir durch Integration $\delta W = \int \delta dW$; setzen wir nun wieder statt W und dW ihre Werthe, so erhalten wir $\delta \int V dx = \int \delta (V dx)$.

Eben so beweisen wir, daß
$\int\int \delta (V dx^2) = \delta \int\int V dx^2$, u. s. w.

Um einen aus Funktionen von x, y und den Differentialen dieser veränderlichen Größen zusammengesetzten Ausdruck unter einem andern Gesichtspunkte der Veränderlichkeit zu differentiiren, so haben wir anzunehmen, daß zugleich x sich in $x + \delta x$, y sich in $y + \delta y$, dx sich in $dx + \delta dx$, dy sich in $dy + \delta dy$, d^2x sich in $d^2x + \delta d^2x$, d^2y sich in $d^2y + \delta d^2y$, u. s. w., verwandle; wir nehmen also die Differentiation wie gewöhnlich vor, indem wir nur die sich auf die neue Art der Veränderlichkeit beziehenden Differentialen durch die Vorsetzung des Zeichens δ andeuten.

Wenn also das Differential eines Ausdruckes nach dem ersten Gesichtspunkte der Veränderlichkeit gegeben ist, so erhalten wir die Variation, d. h., das Differential dieses Ausdruckes nach dem zweiten Gesichtspunkte der Veränderlichkeit, indem wir überall das von der ersten Differentiation herrührende d in δ verwandeln. Es sey, z. B., gegeben

$$dV = M dx + N dy + P d\frac{dy}{dx} + Q d\frac{1}{dx} d\frac{dy}{dx} + \ldots;$$

so ist

$$\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta \frac{dy}{dx} + Q \delta \frac{1}{dx} d\frac{dy}{dx} + \ldots.$$

Eben so ist klar, daß wenn in einem Differentialausdrucke keine anderen Differentialen, als die durch δ ange-

deuteten vorkommen, wir die Integration desselben nach den allgemeinen Regeln der Integralrechnung vornehmen. Es sey, z. B., der Differentialausdruck $x\delta y + y\delta x$; bezeichnen wir das auf die neue Art der Veränderlichkeit sich beziehende Integral durch Σ, so ist

$$\Sigma(x\delta y + y\delta x) = xy + \text{const.}$$

§. 214.

Es sey U ein Differentialausdruck, welcher x, y und die Differentialen dieser veränderlichen Größen enthält; es sey das Differential von U

$$dU = Mdx + Nd^2x + Pd^3x + Qd^4x + \ldots\ldots$$
$$+ mdy + nd^2y + pd^3y + qd^4y + \ldots\ldots$$

(in M, N ...., m, n ..... müssen die Differentialen dergestalt als Faktoren oder Divisoren enthalten seyn, daß sämmtliche Theilsätze des zweiten Gliedes der Gleichung verschwindend klein von derselben Ordnung sind), so ist nach dem vorigen §. die Variation von U

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \ldots\ldots$$
$$+ m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + q\delta d^3y + \ldots\ldots;$$

es ist also

$$\int \delta U = \int (M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \ldots\ldots)$$
$$+ \int (m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + q\delta d^3y + \ldots\ldots);$$

da nun nach dem vorigen §. $\int \delta U = \delta \int U$, $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$, ... $\delta dy = d\delta y$, $\delta d^2y = d^2\delta y$, ...; so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit

$$\delta \int U = \int (M\delta x + Nd\delta x + Pd^2\delta x + Qd^3\delta x + \ldots\ldots)$$
$$+ \int (mdy + nd\delta y + pd^2\delta y + qd^3\delta y + \ldots\ldots);$$

integriren wir nun theilweise, so erhalten wir nach §. 135.

$$\int Nd\delta x = N\delta x - \int dN\delta x,$$

$$\int Pd^2\delta x = Pd\delta x - \int dPd\delta x = Pd\delta x - dP\delta x + \int d^2P\delta x,$$

$$\int Qd^3\delta x = Qd^2\delta x - \int dQd^2\delta x = Qd^2\delta x - dQd\delta x + \int d^2Qd\delta x$$
$$= Qd^2\delta x - dQd\delta x + d^2Q\delta x - \int d^3Q\delta x, \text{ u. s. w.},$$

$$\int nd\delta y = n\delta y - \int dn\delta y,$$

$$\int pd^2\delta y = pd\delta y - \int dpd\delta y = pd\delta y - dp\delta y + \int d^2p\delta y,$$

$\int q d^3 \delta y = q d^2 \delta y - \int dq\, d^2 \delta y = q d^2 \delta y - dq\, d\delta y + \int d^2 q\, d\delta y$
$= q d^2 \delta y - dq\, d\delta y + d^2 q \delta y - \int d^3 q \delta y$, u. s. w.

Substituiren wir diese Werthe, so ist

$$\delta \int U = (N - dP + d^2 Q - \ldots) \delta x + (P - dQ + \ldots) d\delta x$$
$$+ (Q - \ldots.) d^2 \delta x + \ldots..$$
$$+ (n - dp + d^2 q - \ldots.) \delta y + (p - dq + \ldots.) d\delta y$$
$$+ (q - \ldots.) d^2 \delta y + \ldots..$$
$$+ \int (M - dN + d^2 P - d^3 Q + \ldots.) \delta x$$
$$+ \int (m - dn + d^2 p - d^3 q + \ldots.) \delta y.$$

Wenn U außerdem noch eine Funktion einer dritten veränderlichen Größe ist, und wenn

$$dU = M dx + N d^2 x + P d^3 x + Q d^4 x + \ldots.$$
$$+ m dy + n d^2 y + p d^3 y + q d^4 y + \ldots.$$
$$+ \mathfrak{M} dz + \mathfrak{N} d^2 z + \mathfrak{P} d^3 z + \mathfrak{Q} d^4 z + \ldots.,$$

so wird eben so, nach erfolgter Entwickelung von $\delta \int U$, ein von z herrührender Theil unterhalb des Integrals zurückbleiben

$$\int (\mathfrak{M} - d\mathfrak{N} + d^2 \mathfrak{P} - d^3 \mathfrak{Q} + \ldots.) \delta z.$$

Es ist hier nicht das Differential einer veränderlichen Größe als beständig angenommen worden. Wird, z. B., dx als beständig angenommen, so ist $\delta dx = d\delta x = 0$, $\delta d^2 x = d^2 \delta x = 0$, u. s. w.; wenn also U nur eine Funktion von x und y ist, so ist in dem Ausdrucke von dU, N, P, Q, ... = 0 zu setzen, weil dann die $d^2 x$, $d^3 x$, u. s. w., enthaltenden Theilsätze fehlen werden; es ist also dann

$$\delta \int U = (n - dp + d^2 q - \ldots) \delta y + (p - dq + \ldots.) d\delta y$$
$$+ (q - \ldots.) d^2 \delta y + \int M \delta x$$
$$+ \int (m - dn + d^2 p - d^3 q + \ldots.) \delta y.$$

§. 215.

Wenn der Differentialausdruck U unter die Gestalt V dx gebracht werden kann, welches V Funktionen von x, y und den Differentialquotienten von y enthält, so findet in dem Ausdrucke von $\delta \int U$ eine bemerkungswerthe Reduktion statt.

Setzen wir, wie gewöhnlich,

$$dy = pdx,\ dp = qdx,\ dq = rdx,\ \text{u. s. w.};$$

es sey $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$,

so ist $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$.

Es ist $\delta \int U = \delta \int V dx = \int \delta (Vdx) =$
$\int (\delta V dx + V d\delta x)$; da nun $\int V d\delta x = V\delta x - \int dV \delta x$,
so ist $\delta \int V dx = V\delta x + \int (\delta V dx - dV\delta x)$; substituiren wir statt δV und dV ihre Werthe, so erhalten wir

$$\int (\delta V dx - dV\delta x) =$$
$$\int (M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots)dx$$
$$- \int (Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots)\delta x$$
$$= \int N(\delta y - p\delta x)dx + \int P(\delta p - q\delta x)dx$$
$$+ \int Q(\delta q - r\delta x)dx + \int R(\delta r - s\delta x)dx + \ldots$$

Es ist $\delta p = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - pd\delta x}{dx}$,

daher $\delta p - q\delta x = \frac{d\delta y - pd\delta x}{dx} - \frac{dp\delta x}{dx}$

$$= \frac{d\delta y - pd\delta x - dp\delta x}{dx} = \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx};$$

$$\delta q = \delta \frac{dp}{dx} = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx},$$

daher $\delta q - r\delta x = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx} - \frac{dq\delta x}{dx}$

$$= \frac{d\delta p - qd\delta x - dq\delta x}{dx} = \frac{d(\delta p - q\delta x)}{dx};$$

$$\delta r = \delta \frac{dq}{dx} = \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx},$$

daher $\delta r - q\delta x = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx} - \frac{dr\delta x}{dx}$

$$= \frac{d\delta q - rd\delta x - dr\delta x}{dx} = \frac{d(\delta q - r\delta x)}{dx}, \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir nun, um abzukürzen, $\delta y - p\delta x = v$, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden

$\delta p - q\delta x = \frac{dv}{dx}$; $\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx}$; $\delta r - s\delta x = \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx}$, u. ſ. w.; wir erhalten alſo, indem wir dieſe Ausdrücke ſubſtituiren,

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int N v dx + \int P dv + \int Q d \frac{dv}{dx}$$
$$+ \int R d \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} + \ldots .$$

Es iſt nun $\int P dv = Pv - \int dP v$,

$$\int Q d \frac{dv}{dx} = Q \frac{dv}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dv = Q \frac{dv}{dx} - \frac{dQ}{dx} v + \int d \frac{dQ}{dx} v,$$

$$\int R d \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} = R . \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} - \int \frac{dR}{dx} d \frac{dv}{dx}$$
$$= R . \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} - \frac{dR}{dx} \frac{dv}{dx} + \int d \frac{dR}{dx} \frac{dv}{dx}$$
$$= R . \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} - \frac{dR}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} v - \int d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} v,$$

u. ſ. w.; ſubſtituiren wir dieſe Werthe in die vorige Gleichung, ſo verwandelt ſich dieſelbe in

$$\delta \int V dx = V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} - \ldots \right) v$$
$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots \right) \frac{dv}{dx} + \left(R - \ldots \right) \frac{1}{dx} d \frac{dv}{dx} + \ldots$$
$$+ \int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} + \ldots \right) v dx.$$

Setzen wir ſtatt v wieder ſeinen Werth $\delta y - p\delta x$, ſo erſcheint der Theil, welcher in dem zweiten Gliede der Gleichung unterhalb des Integrals ſtehen bleibt, unter der Geſtalt

$$\int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \ldots \right) dx \delta y$$
$$- \int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \ldots \right) p dx \delta x.$$

Wenn alſo U unter die Geſtalt $V dx$ gebracht werden kann, ſo erkennen wir jetzt, daß die Multiplikatoren, welche unterhalb der nicht entwickelten Integrale δy und δx mul-

tipliziren (§. 214.), nicht unabhängig von einander sind; nennen wir φ den Multiplikator von δy, und ψ den von δx, so ist

$$\varphi = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\, d\, \frac{dQ}{dx} - \ldots\right) dx,$$

$$\psi = -\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\, d\, \frac{dQ}{dx} + \ldots\right) p\, dx;$$

es ist also $\varphi p\, dx = -\psi\, dx$, d. i. $\varphi\, dy + \psi\, dx = o$.

§. 216.

Wenn U ein richtiges Differential ist, so kann in $\delta \int U$ kein nicht entwickelbares Integral mehr vorkommen; denn es sey $W = \int U$, so ist $U = dW$, $\delta U = \delta dW = d\delta W$, $\int \delta U = \delta \int U = \delta W$; nun ist aber W ein entwickeltes Integral; es kann also in $\delta W = \delta \int U$ kein nicht entwickelbares Integral mehr vorkommen. Da nun das Zeichen $\int$ sich auf d und nicht auf δ bezieht, so müssen, damit die nicht entwickelbaren Integralen verschwinden, die Multiplikatoren φ und ψ von δy und δx Null seyn; wenn jedoch U unter die Gestalt $V dx$ gebracht werden kann, so braucht nur die einzige Gleichung $\varphi\, dy + \psi\, dx = o$ stattzufinden.

Diesen beiden Bedingnißgleichungen in dem ersten Falle und der einen Bedingnißgleichung in dem zweiten Falle muß also identisch Genüge geschehen, damit ein gegebener Differentialausdruck U ein richtiges unmittelbares Differential sey.

Es sey z. B. der Differentialausdruck $U = x d^2y - y d^2x$, so ist

$$dU = -dy d^2x - y d^3x,$$
$$+ dx d^2y + x d^3y,$$

daher $M = o$, $N = -dy$, $P = -y$, $Q = o$ ....

$$m = o, \quad n = dx, \quad p = x, \quad q = o \ldots.;$$

da nun den Bedingnißgleichungen

$$\varphi = -d^2x + d^2x = o,$$
$$\psi = +d^2y - d^2y = o$$

identisch Genüge geschieht, so ist $x d^2y - y d^2x$ ein richtiges

unmittelbares Differential; und in der That ist dieser Ausdruck das Differential von $xdy - ydx$.

§. 217.

Wenden wir nun das Vorhergehende an, das maximum oder minimum eines Integrals zwischen gegebenen Gränzen zu bestimmen.

Es sey $W = \int U$, U sey eine gegebene Function von x, y und den Differentialen dieser veränderlichen Größen; welches muß das Verhalten zwischen x und y seyn, damit das Integral zwischen den gegebenen Gränzen ein maximum oder minimum sey?

Da wir gegenwärtig das Verhalten zwischen x und y als veränderlich betrachten, so haben wir anzunehmen, daß die veränderlichen Größen und ihre Differentialen sich zugleich um ihre Variationen ändern, und so zwei unendlich wenig von einander verschiedene Zustände des Integrals zu vergleichen; wir zeigen also, gerade wie in §. 39., nach, daß dasjenige Verhalten zwischen x und y, für welches $\delta W = \delta \int U = o$, einem maximum oder minimum von $W = \int U$ entspricht.

Indem wir die Entwickelung von dU wie in §. 214. vorstellen, so ist

$$\begin{aligned}\delta \int U = {} & A\delta x + Bd\delta x + Cd^2\delta x + \ldots. \\ & + A'\delta y + B'd\delta y + C'd^2\delta y + \ldots. \\ & + \int(\varphi\delta y + \psi\delta x),\end{aligned}$$

indem wir, um abzukürzen,

$N - dP + d^2Q - \ldots = A$, $n - dp + d^2q - \ldots = A'$,
$P - dQ + \ldots\ldots\ldots = B$, $p - dq + \ldots\ldots\ldots = B'$,
$Q - \ldots\ldots\ldots\ldots = C$, $q - \ldots\ldots\ldots\ldots = C'$,
$M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots\ldots = \psi$,
$m - dn + d^2p - d^3q + \ldots\ldots = \varphi$

setzen. Diese Entwickelung von $\delta \int U$, welche $= o$ seyn muß, besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, nämlich aus entwickelten Integralen, und aus einem nicht entwickelbaren Integrale, weil das Zeichen $\int$ sich nicht auf

die Variation δ bezieht; aus dieser Gleichung folgt aber, daß der eine dieser beiden Theile gleich seyn soll dem mit dem negativen Zeichen genommenen anderen Theile; dieses kann nun, weil beide Theile nicht mit einander vergleichbar sind, nur dadurch stattfinden, daß ein jeder dieser beiden Theile $= o$ ist; für das maximum oder minimum des Integrals müssen also die beiden Gleichungen stattfinden

$$A\delta x + Bd\delta x + Cd^2\delta x + \ldots.$$
$$+ A'\delta y + B'd\delta y + C'd^2\delta y + \ldots. = o,$$
$$\varphi\,\delta y + \psi\,\delta x = o.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn U nicht unter die Gestalt Vdx gebracht werden kann (§. 215.), d. h. wenn x und y vollkommen unabhängig von einander sind, so sind auch δx und δy vollkommen unabhängig von einander; damit also die Gleichung $\varphi\delta y + \psi\delta x = o$ stattfinde, so muß sowohl $\varphi = o$, als $\psi = o$ seyn.

2) Wenn U unter die Gestalt Vdx gebracht werden kann, so haben wir §. 114. gesehen, daß $\psi = -\varphi p$; wenn wir also $\varphi = o$ setzen, so folgt daraus, daß auch $\psi = o$.

Dieses $\varphi = o$, $\psi = o$ sind Gleichungen zwischen x, y, und den Differentialen dieser veränderlichen Größen; sie sind also die Differentialgleichungen der krummen Linie, welcher die Eigenschaft des maximum oder minimum zusteht.

Es bleibt also jetzt

$$\int\delta U = A\delta x + Bd\delta x + Cd^2\delta x + \ldots.$$
$$+ A'\delta y + B'd\delta y + C'd^2\delta y + \ldots.,$$

welches Integral zwischen den angegebenen Gränzen $= o$ seyn muß. Die Coordinaten des einen Endpunktes seyen x' y'; angenommen, daß für diese Werthe A, B, C.... die bestimmten Werthe α, β, γ....; A', B', C'.... die bestimmten Werthe α', β', γ'.... erhalten; stellen wir den Werth des Integrals für diese Gränze durch T' vor, so ist

$$T' = \alpha\delta x' + \beta d\delta x' + \gamma d^2\delta x' + \ldots.$$
$$+ \alpha'\delta y' + \beta' d\delta y' + \gamma' d^2\delta y' + \ldots.;$$

die Coordinaten des andern Endpunktes des Integrals seyen x'', y''; angenommen, daß für diese Werthe A, B, C.... die bestimmten Werthe α'', β'', γ''...., A′, B′, C′.... die bestimmten Werthe α''', β''', γ'''.... erhalten; stellen wir den Werth des Integrals für diese Gränze durch T″ vor, so ist

$$T'' = \alpha''\delta x'' + \beta'' d\delta x'' + \gamma'' d^2\delta x'' + \ldots.$$
$$+ \alpha'''\delta y'' + \beta''' d\delta y'' + \gamma''' d^2\delta y'' + \ldots.$$

Der Werth des Integrals zwischen den angegebenen Gränzen ist also $T' - T''$ (§. 169.); es ist daher $T' - T'' = o$.

Wenn nun die Gränzen des Integrals fest sind (Fig. 24.), so sind die Coordinaten x', y', x'', y'' der Endpunkte P und Q beständige Größen; es ist also $\delta x' = o$, $d\delta x' = o$...., $\delta y' = o$, $d\delta y' = o$...., $\delta x'' = o$, $d\delta x'' = o$...., $\delta y'' = o$, $d\delta y'' = o$....; der Gleichung $T' - T'' = o$ wird also dadurch identisch Genüge geleistet.

Wenn aber die Gränzen des Integrals nicht fest sind, wenn z. B. die Endpunkte P und Q (Fig. 25.) auf zwei krummen Linien MN und KL fliegen, deren Gleichungen sind $f(x, y) = o$, $F(x, y) = o$, so sind jetzt x', y' durch die Gleichung $f(x', y') = o$, und x'', y'' durch die Gleichung $F(x'', y'') = o$ mit einander verbunden; es sind also $\delta x'$, $\delta y'$ durch Variation der Gleichung $f(x', y') = o$, und $\delta x''$, $\delta y''$ durch die Variation der Gleichung $F(x'', y'') = o$ mit einander verbunden, substituiren wir also die daraus gezogenen Werthe von $\delta y'$, $d\delta x'$...., $\delta y''$, $d\delta y''$...., so werden in der Gleichung $T' - T'' = o$ nur noch die Variationen $\delta x'$, $d\delta x'$...., $\delta x''$, $d\delta x''$...., vorkommen; da nun weiter keine Reduktion stattfinden kann, so müssen die Multiplikatoren der unabhängigen Variationen $= o$ seyn.

Die Anwendung des Bisherigen auf einige Beispiele wird über diese Betrachtungen mehr Licht verbreiten.

§. 218.

Es drückt $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ die Länge des Bogens einer krummen Linie aus; welche krumme Linie wird nun so beschaffen seyn, daß zwischen zwei gegebenen Punkten dieser Bogen ein minimum ist?

Es ist gegenwärtig $U = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$,

daher $\delta U = \frac{dx\,d\delta x}{ds} + \frac{dy\,d\delta y}{ds}$,

daher $M = o$, $N = \frac{dx}{ds}$, $P = o$ ....,

$m = o$, $n = \frac{dy}{ds}$, $p = o$ ....;

die beiden Gleichungen $\varphi = o$, $\psi = o$ sind also gegenwärtig $d\frac{dy}{ds} = o$, $d\frac{dx}{ds} = o$; es ist also $\frac{dy}{ds} =$ einer Constanten c, und $\frac{dx}{ds} =$ einer Constanten c', welche beide Constanten aber nicht unabhängig von einander sind, denn indem wir die Quadrate dieser beiden Gleichungen zu einander addiren, so erhalten wir $c^2 + c'^2 = 1$, $c = \sqrt{1 - c'^2}$.

Dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, und setzen wir $\frac{c}{c'} = C$, so ist $\frac{dy}{dx} = C$, $dy = Cdx$, daher $y = Cx + C'$; die kürzeste Entfernung der beiden Punkte ist also eine gerade Linie.

Es ist gegenwärtig $\int \delta U = \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dx}{ds}\,\delta x$; es seyen wieder x', y', x'', y'' die Coordinaten der Punkte, zwischen welchen das Integral zu nehmen ist, so ist jetzt die Gleichung $T' - T'' = o$ gleichbedeutend mit

$$\frac{dy'}{ds'}\,\delta y' + \frac{dx'}{ds'}\,\delta x' - \frac{dy''}{ds''}\,\delta y'' - \frac{dx''}{ds''}\,\delta x'' = o.$$

Wenn die Gränzen des Integrals fest sind, so ist $\delta y' = o$, $\delta x' = o$, $\delta y'' = o$, $\delta x'' = o$, es wird also

dieser Gleichung identisch Genüge geleistet. Um nun die Constanten C und C′ in der Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, so bemerken wir, daß $y' = Cx' + C'$, $y'' = Cx'' + C'$; es ist also

$$C = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad C' = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''} x';$$

die Gleichung der geraden Linie ist also

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x').$$

Wenn die Endpunkte nicht fest sind, sondern sich auf zwei krummen Linien befinden, deren Gleichungen $f(x', y') = o$, $F(x'', y'') = o$ sind, so ziehen wir aus der Variation der ersten Gleichung den Werth von $\delta y' = m\delta x'$, und aus der Variation der zweiten Gleichung den Werth von $\delta y'' = n\delta x''$, substituiren diese Werthe, und erhalten so

$$T' - T'' = \left(m\frac{dy'}{ds'} + \frac{dx'}{ds'}\right)\delta x' + \left(n\frac{dy''}{ds''} + \frac{dx''}{ds''}\right)\delta x'' = o;$$

da nun $\delta x'$ und $\delta x''$ unabhängig von einander sind, so ist

$$m\frac{dy'}{ds'} + \frac{dx'}{ds'} = o, \quad n\frac{dy''}{ds''} + \frac{dx''}{ds''} = o, \text{ daher}$$

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m} = -\frac{\delta x'}{\delta y'}, \text{ und } \frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{n} = -\frac{\delta x''}{\delta y''}.$$

Es ist $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy''}{dx''} =$ der Tangente C des Winkels, welchen die gerade Linie mit der Axe X bildet; es ist $-\frac{\delta x'}{\delta y'}$ die Tangente des Winkels, welchen die durch den ersten Endpunkt der ersten krummen Linie geführte Normale, und $-\frac{\delta x''}{\delta y''}$ die Tangente des Winkels, welchen die durch den andern Endpunkt der andern krummen Linie geführte Normale mit der Axe X bildet; die kürzeste Entfernung der beiden krummen Linien ist also ihre gemeinschaftliche Normale.

Es ist $C = \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{1}{m}$, und eben so

$$C = \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{1}{n}, \text{ also}$$

$(y' - y'')\,m + x' - x'' = o$, $(y' - y'')\,n + x' - x'' = o$; außerdem bestehen aber noch zwischen x' und y' die Gleichung $f(x', y') = o$, und zwischen x'' und y'' die Gleichung $F(x'', y'') = o$; aus diesen vier Gleichungen können wir also jetzt durch Elimination die Werthe der Coordinaten x', y', x'', y'' der Endpunkte der geraden Linie bestimmen.

§. 219.

In der Mechanik wird bewiesen, daß die Zeit, welche ein Körper gebraucht, um von einem Punkte **A** zu einem Punkte **B** (Fig. 26.), vermöge der Beschleunigung der Schwerkraft längs einer krummen Linie, zu fallen, *ausgedrückt* ist durch $t = \int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$, in welcher Gleichung g die Beschleunigung der Schwerkraft, und h die vertikale Ordinate **AC** der höher liegenden Punkte **A** vorstellt (s. meine Mechanik, Seite 291.); wie muß diese krumme Linie beschaffen seyn, damit diese Zeit ein **minimum** ist?

Es ist also $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$, $dt\sqrt{2g} = \frac{ds}{\sqrt{h-y}} = U$;

da nun $d^2s = d\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

$= \frac{dx}{ds} d^2x + \frac{dy}{ds} d^2y$, so ist $dU = \frac{d^2s}{\sqrt{h-y}} + \frac{1}{2}\frac{ds\,dy}{\sqrt{h-y}}$

$= \frac{dx\,d^2x}{ds\sqrt{h-y}} + \frac{1}{2}\frac{ds\,dy}{\sqrt{(h-y)^3}} + \frac{dy\,d^2y}{ds\sqrt{h-y}}$;

es ist also gegenwärtig (§. 214.)

$M = o$, $N = \frac{dx}{ds\sqrt{h-y}}$, $P = o$, ...,

$m = \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{(h-y)^3}}$, $n = \frac{dy}{ds\sqrt{h-y}}$, $p = o$, ...,

es sind also gegenwärtig die beiden Gleichungen $\psi = 0$, $\varphi = 0$ gleichbedeutend mit

$$d\,\frac{dx}{ds\sqrt{h-y}} = 0,\quad \frac{1}{2}\,\frac{ds}{\sqrt{(h-y)^3}} + d\,\frac{dy}{ds\sqrt{h-y}} = 0.$$

Aus $d\,\frac{dx}{ds\sqrt{h-y}} = 0$ folgt, indem wir die willkürliche Constante durch $\frac{1}{\sqrt{2c}}$ vorstellen, $\frac{dx}{ds\sqrt{h-y}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}$;

$dx\sqrt{2c} = ds\sqrt{h-y}$; $2c\,dx^2 = ds^2\,|\,(h-y) = (dx^2+dy^2)(h-y)$; $dx^2(2c-h+y) = dy^2(h-y)$;

$$dx^2 = \frac{h-y}{2c-h+y}\,dy^2;\quad \pm dx = dy\sqrt{\frac{h-y}{2c-h+y}}$$

$$= \frac{(h-y)\,dy}{\sqrt{2c(h-y)-(h-y)^2}};$$ setzen wir $h-y = u$, so ist

$dy = -du$, daher $\pm dx = -\frac{udu}{\sqrt{2cu-u^2}}$; es ist also

$$\pm x = -\int \frac{udu}{\sqrt{2cu-u^2}} = (\S.\ 113.)\ \sqrt{2cu-u^2} - c\int \frac{du}{\sqrt{2cu-u^2}} = \sqrt{2cu-u^2} - c\ \text{arc. sin.}\ \frac{u-c}{c} + \text{const.}$$

Es ist $-\text{arc. sin.}\ \frac{u-c}{c} = +\text{arc. sin.}\ \frac{c-u}{u}$

$$= -\frac{\pi}{2} + \text{arc. sin.}\ \frac{c-u}{c} + \frac{\pi}{2}$$

$$= -\text{arc. cos.}\ \frac{c-u}{c} + \frac{\pi}{2};$$ rechnen wir $+\frac{c\pi}{2}$ in die willkürliche Constante ein, so erhalten wir

$$\pm x = -c\ \text{arc. cos.}\ \frac{c-u}{c} + \sqrt{2cu-u^2} + c'$$

$$= -c\ \text{arc. cos.}\ \frac{c-(h-y)}{c} + \sqrt{2c(h-y)-(h-y)^2} + c';$$

es ist also die krumme Linie, welche der Bedingniß des minimum Genüge leistet, die eigentliche Cykloide.

Wenn die Coordinaten x', y', x'', y'' der Endpunkte fest sind, so wird der Gleichung $\int \delta U =$

$$\frac{dx'}{ds'\sqrt{h-y'}}\delta x' + \frac{dy'}{ds'\sqrt{h-y'}}\delta y'$$

$$-\frac{dx''}{ds''\sqrt{h-y''}}\delta x'' - \frac{dy''}{ds''\sqrt{h-y''}}\delta y'' = 0$$

identisch Genüge geleistet.

Um die beiden Constanten c und c' zu bestimmen, so verlegen wir den Ursprung der Coordinaten nach dem Punkte A, lassen die neuen Axen den vorigen parallel, und zählen die Ordinaten in der entgegengesetzten Richtung; wir setzen also $h - y = u$, und erhalten so

$$\pm x = -c \text{ arc. cos. } \frac{c-u}{c} + \sqrt{2cu-u^2} + c';$$ da

nun u und x zugleich verschwinden, so folgt daraus $c' - c \text{ arc. cos. } 1 = 0$, $c' = 0$; die Coordinaten des andern Endpunktes seyen u'' und x'', so ist

$$\pm x'' = -c \text{ arc. cos. } \frac{c-u''}{c} + \sqrt{2cu''-u''^2},$$ aus

welcher transzendenten Gleichung wir den Werth des Halbmessers c des erzeugenden Kreises näherungsweise bestimmen.

Wenn die Gränzen nicht fest sind, sondern wenn die Endpunkte sich auf zwei gegebenen krummen Linien befinden, so verwandeln sich nach den gehörigen Reduktionen die beiden Gleichungen, in welche die Gleichung $\int \delta U = 0$ zerfällt, in $dx'\delta x' + dy'\delta y' = 0$, $dx''\delta x'' + dy''\delta y'' = 0$, in einem jeden der beiden Endpunkte ist also die Tangente der Cykloide der entsprechenden krummen Linie normal, welches wir wie in dem vorigen §. nachzeigen.

§. 220.

Es enthalte nun U die drei veränderlichen Größen x, y, z und die Differentialen derselben.

Setzen wir (§. 214.)

$$\mathfrak{M} - d\mathfrak{N} + d^2\mathfrak{P} - \ldots = \pi,$$

so zeigen wir, wie in §. 217., nach, daß, damit ein maximum oder minimum stattfinde,

$$\int(\psi\delta x + \varphi\delta y + \pi\delta z) = 0,$$

und daß sodann $\int\delta U$, genommen zwischen den gegebenen Gränzen, welches wir wieder durch $T' - T''$ vorstellen wollen, auch $= 0$ seyn muß.

Wenn nun x, y und z vollkommen unabhängig von einander sind, so kann der ersten Gleichung nur dadurch Genüge geleistet werden, daß zugleich $\psi = 0$, $\varphi = 0$, $\pi = 0$, weil alsdann auch δx, δy und δz vollkommen unabhängig von einander sind. Wenn aber die krumme Linie, welche die Eigenschaft des maximum oder minimum besitzen soll, auf einer gegebenen krummen Fläche verzeichnet werden soll, so folgt aus der zwischen x, y und z gegebenen Gleichung derselben $\delta z = p'\delta x + q'\delta y$; es ist also $\int(\psi\delta x + \varphi\delta y + \pi\delta z) = \int(\psi + p'\pi)\,\delta x + \int(\varphi + q'\pi)\,\delta y$; da nun x und y, folglich auch δx und δy, unabhängig von einander sind, so kann dieser Gleichung nur dadurch Genüge geleistet werden, daß zugleich $\psi + p'\pi = 0$, $\varphi + q'\pi = 0$. Die Gleichungen, welche aus $\int(\psi\delta x + \varphi\delta y + \pi\delta z) = 0$ folgen, sind die Gleichungen der krummen Linie, für welche das gegebene Integral ein maximum oder minimum ist.

Wenn die Gränzen, zwischen welchen das Integral genommen werden soll, fest sind, so ist $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$ .... $\delta x'' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta z'' = 0$ ....; es wird also dann der Gleichung $T' - T'' = 0$ identisch Genüge geleistet. Wenn aber der eine Endpunkt fest ist, und der andere Endpunkt sich auf einer gegebenen krummen Fläche oder einer gegebenen krummen Linie befinden soll, so sind die Variationen der Coordinaten und der Differentialen der Coordinaten des ersten Punktes $= 0$; aus der Gleichung der krummen Fläche, oder aus den Gleichungen der krummen Linie, je nachdem der andere Endpunkt sich auf einer gegebenen krummen Fläche oder krummen Linie befinden soll, substituiren wir in dem ersten Falle statt der Variation der einen Coordinate, und in dem zweiten Falle statt

der Variationen zweier Coordinaten ihre Werthe, und setzen dann die Multiplikatoren derjenigen Variationen, welche unabhängig von einander bleiben, = o.

Wenn die beiden Endpunkte nicht fest sind, sondern sich auf gegebenen krummen Flächen oder krummen Linien befinden sollen, so substituiren wir statt der einen der Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ in dem ersten Falle, und in dem zweiten Falle statt zweier dieser Variationen ihre Werthe in $T' - T'' = o$, und setzen dann die Multiplikatoren derjenigen Variationen, welche unabhängig von einander bleiben, = o.

§. 221.

Wenden wir nun dieses Verfahren noch auf ein Beispiel an:

Es seyen die Coordinaten zweier Punkte, zwischen welchen die kürzeste Entfernung zu bestimmen ist, auf *drei* rechtwinklige Coordinatenaxen X, Y, Z bezogen; es sey $U = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, und es sey das minimum von $\int U$ zu bestimmen. Da gegenwärtig

$dU = \frac{dx}{ds} d^2x + \frac{dy}{ds} d^2y + \frac{dz}{ds} d^2z$, so ist

$M = o$, $N = \frac{dx}{ds}$, $P = o$ . . . . ,

$m = o$, $n = \frac{dy}{ds}$, $p = o$ . . . . ,

$\mathfrak{M} = o$, $\mathfrak{N} = \frac{dz}{ds}$, $\mathfrak{p} = o$ . . . . ; es ist also

$\psi = d\frac{dx}{ds}$, $\varphi = d\frac{dy}{ds}$, $\pi = d\frac{dz}{ds}$.

Wenn also x, y und z unabhängig von einander sind, so finden die drei Gleichungen statt

$d\frac{dx}{ds} = o$, $d\frac{dy}{ds} = o$, $d\frac{dz}{ds} = o$, woraus $\frac{dx}{ds} = c$, $\frac{dy}{ds} = c'$, $\frac{dz}{ds} = c''$ folgt; addiren wir die Quadrate dieser

drei Gleichungen zu einander, so erhalten wir $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$, daher $c'' = \sqrt{1 - c^2 - c'^2}$, die drei Constanten c, c′, c″ sind also nicht unabhängig von einander. Dividiren wir zuerst die erste Gleichung durch die dritte, und sodann die zweite durch die dritte, und setzen wir $\frac{c}{c''} = C$, $\frac{c'}{c''} = C'$, so ist $dx = C\,dz$, $dy = C'\,dz$; es ist also $x = Cz + C''$, $y = C'z + C'''$; die kürzeste Entfernung der beiden Punkte ist also eine gerade Linie.

Wenn die Endpunkte fest sind, so wird der Gleichung $T' - T'' = 0$ identisch Genüge geleistet; die Constanten C, C′, C″, C‴ bestimmen wir wieder, indem wir statt x, y, z zuerst die gegebenen Coordinaten des einen, und sodann des andern Endpunktes setzen, wodurch wir vier Gleichungen zwischen diesen vier Unbekannten erhalten, deren Werthe wir daraus durch Elimination bestimmen; und so finden wir die Gleichungen der geraden Linie

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'),\quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z').$$

Wenn die beiden Endpunkte nicht fest sind, sondern auf zwei krummen Flächen liegen, deren Gleichungen $f(x', y', z') = 0$, $F(x'', y'', z'') = 0$ sind, so folgt aus der ersten Gleichung $\delta z' = p''\,\delta x' + q''\,\delta y'$, und aus der zweiten Gleichung $\delta z'' = p'''\,\delta x'' + q'''\,\delta y''$; es ist also

$$T' - T'' = \frac{dx'}{ds'}\delta x' + \frac{dy'}{ds'}\delta y' + \frac{dz'}{ds'}\delta z' - \frac{dx''}{ds''}\delta x''$$
$$- \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{dz''}{ds''}\delta z'' = 0 \text{ gleichbedeutend mit}$$
$$\delta x'\left(\frac{dx'}{ds'} + p''\,\frac{dz'}{ds'}\right) + \delta y'\left(\frac{dy'}{ds'} + q''\,\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$- \delta x''\left(\frac{dx''}{ds''} + p'''\,\frac{dz''}{ds''}\right) + \delta y''\left(\frac{dy''}{ds''} + q'''\,\frac{dz''}{ds''}\right) = 0;$$

setzen wir jetzt die Multiplikatoren von $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ $= 0$, so erhalten wir $dx' + p''\,dz' = 0$, $dy' + q''\,dz' = 0$, $dx'' + p'''\,dz'' = 0$, $dy'' + q'''\,dz'' = 0$, aus welchen Gleichungen folgt $C = -p' = -p''$, $C' = -q' = -q''$;

die kürzeste Entfernung zweier krummen Flächen ist also ihre gemeinschaftliche Normale (§. 87.).

Es seyen x', y', z'; x'', y'', z'' die gegebenen Coordinaten zweier auf einer Kugel liegender Punkte. Die auf drei durch ihren Mittelpunkt gehende rechtwinklige Coordinatenaxen bezogene Gleichung der Kugel ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, woraus $\delta z = -\frac{x}{z}\delta x - \frac{y}{z}\delta y$ folgt; es ist also

$p' = -\frac{x}{z}$, $q' = -\frac{y}{z}$; die Gleichungen $\psi + p'\pi = o$, $\varphi + q'\pi = o$ des vorigen §. sind also gegenwärtig

$d\frac{dx}{ds} - \frac{x}{z}d\frac{dz}{ds} = o$, $d\frac{dy}{ds} - \frac{y}{z}d\frac{dz}{ds} = o$, woraus folgt, indem wir ds beständig setzen, $zd^2x - xd^2z = o$, $zd^2y - yd^2z = o$, folglich auch, indem wir zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2z}{z}$ eliminiren, $yd^2x - xd^2y = o$;

die Integrale dieser Gleichungen sind $z\,dx - x\,dz = c\,ds$, $z\,dy - y\,dz = c'ds$, $y\,dx - x\,dy = c''ds$; addiren wir die durch $-y$ multiplizirte erste Gleichung, die durch x multiplizirte zweite Gleichung, und die durch z multiplizirte dritte Gleichung, und dividiren wir sodann durch dz, so ist $-cy + c'x + c''z = o$, welches die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ist, auf welcher sich also die kürzeste Entfernung der beiden Punkte befindet. Die kürzeste Entfernung zweier Punkte einer Kugel ist also der Bogen eines großen Kreises derselben.

Der Gleichung $T' - T'' = o$ wird identisch Genüge geleistet, weil nach Annahme x', y', z'; x'', y'', z'' beständige Größen sind.

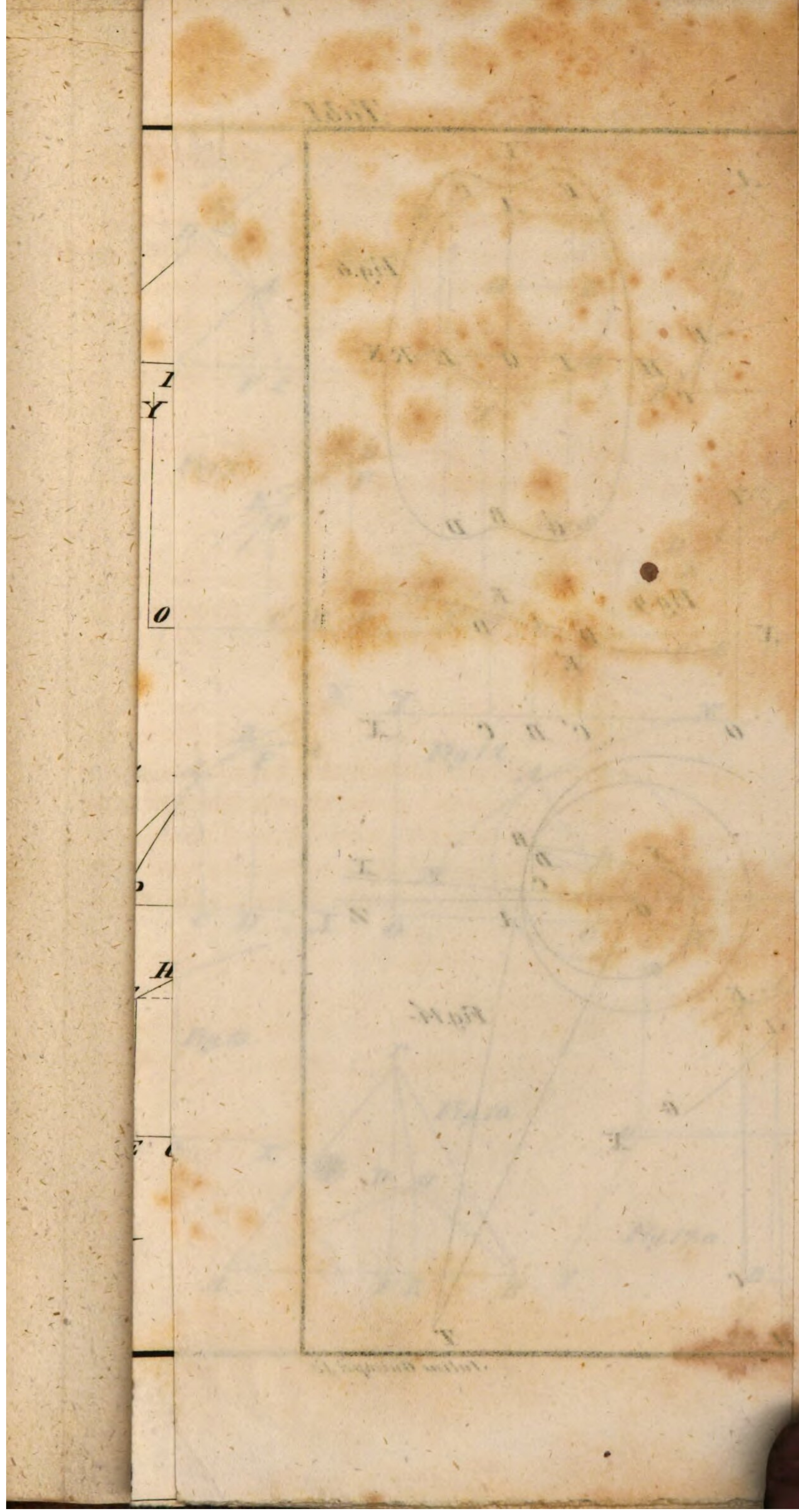

Fig. 1.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Umpfenbach, Hermann,

Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung

Berlin 1828

Math.p. 614 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083015-5